Кафедра медицинской и биологической физики

Тема: Интегральное исчисление Дифференциальные уравнения

лекция № 2 для студентов 1 курса, обучающихся по специальности стоматология

План лекции:

- Понятие неопределенного интеграла.Свойства неопределенного интеграла
- Понятие определенного интеграла.Свойства определенного интеграла
- Таблица интегралов от некоторых функций. Способы вычисления интегралов
- Типы дифференциальных уравнений и способы их решения

Понятие неопределенного интеграла

- Функция $F(x)$, называется первообразной для функции $f(x)$, если ее производная $F'(x)$ равна данной функции, $F'(x) = f(x)$, а $dF(x)=f(x)dx$.
- Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ для данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом (обозначается $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция, C-постоянная).

Свойства неопределенного интеграла

- дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: d∫F(x)dx = F(x)dx;
- неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции: ∫F(x)dx= F(x) + C;

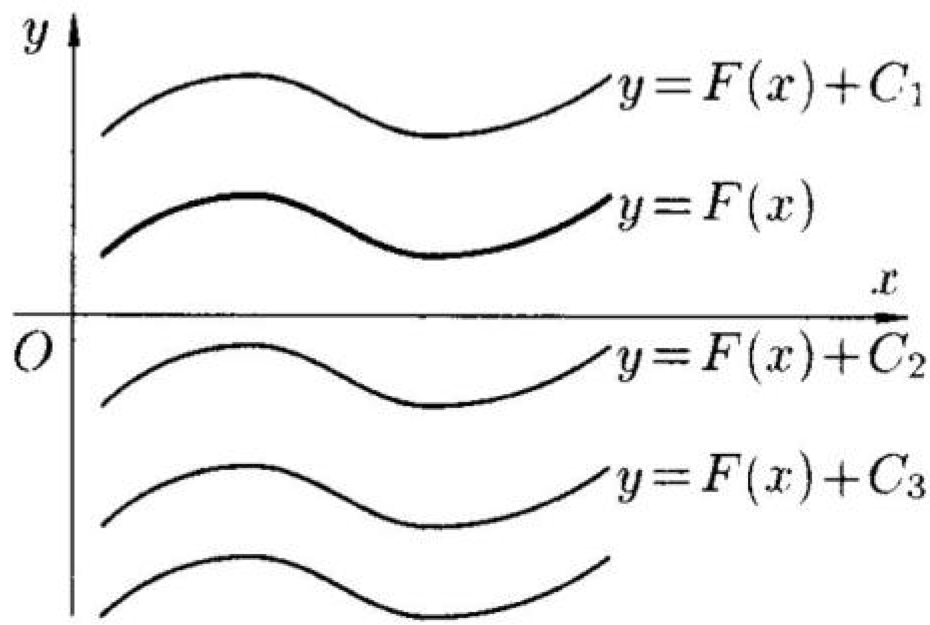


Таблица интегралов элементарных функций

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$$

Методы интегрирования

1.Интегрирование по формулам линейных преобразований

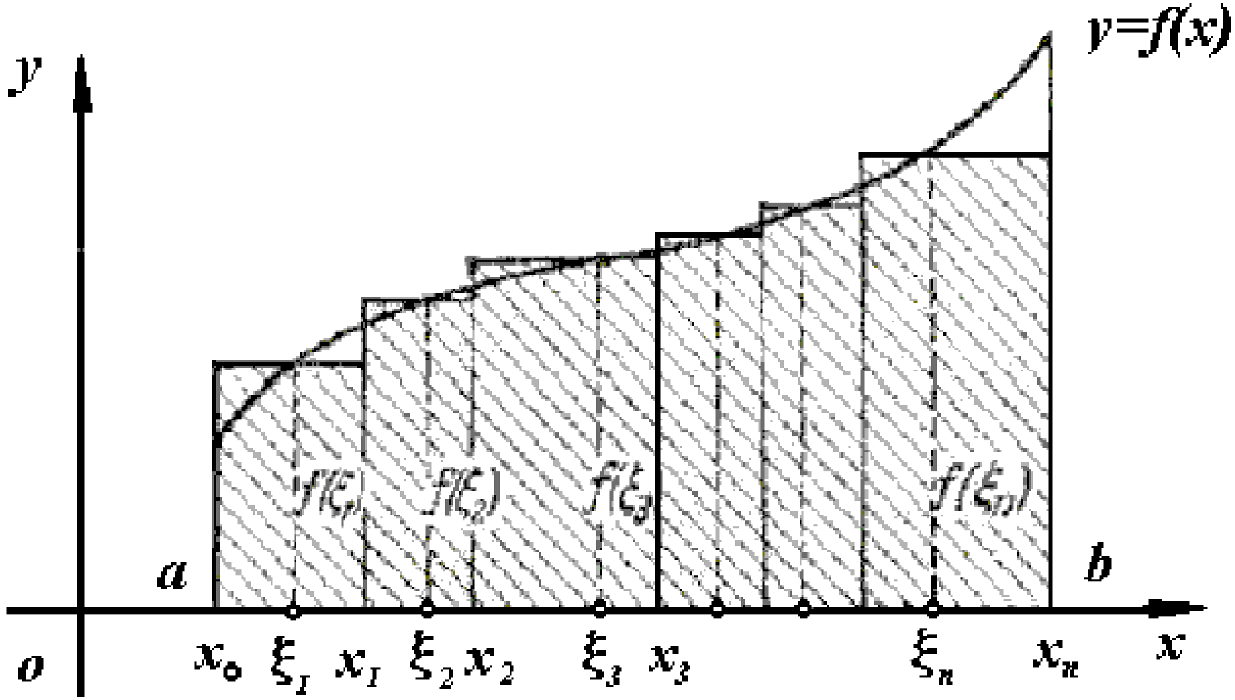
$\int \alpha u(x)dx = \alpha \int u(x)dx -$ выносим постоянный множитель

$\int (v(x)+u(x))dx = \int v(x)dx + \int u(x)dx -$ раскладываем на слагаемые

2.$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du. -$ интегрирование по частям

3.$\int F(x)dx = \int F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \int F(x)dx = \int F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. -$ метод замены переменных

Понятие определенного интеграла



Понятие определенного интеграла

- Выражение $\int_a^b f(x)dx$ называют определенным интегралом функции f(x) на отрезке [ab].
- Если неопределенный интеграл представляет собой совокупность функций, отстоящих друг от друга на величину С, то определенный интеграл – это всегда число, значение которого определяется видом подынтегральной функции и значениями верхнего (b) и нижнего (a) пределов интегрирования.

Свойства определенного интеграла

- при смене пределов интегрирования меняется знак у определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- если пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- если точка с принадлежит отрезку [ab], то выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Формула Ньютона -Лейбница

- Чтобы вычислить определенный интеграл необходимо найти его первообразную (неопределенный интеграл) и подставить пределы интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Дифференциальные уравнения

- Уравнение, содержащее независимую переменную x, функцию f(x) и ее производные от первого до n-го порядка, называется дифференциальным. $F(x,f(x),f'(x),f''(x),\ldots,f^{(n)}(x),C)=0$.
- Порядок дифференциального уравнения определяется порядком наивысшей производной.
- Решением дифференциального уравнения называется функция $y=f(x)$, которая при подстановке обращает это уравнение в тождество.

Алгоритм решения дифференциальных уравнений

- представить производную в дифференциальной форме, т.е. ;
$$y' = \frac{dy}{dx}$$
- разделить переменные, т.е. все, что относится к одной переменной (x) собрать в одной части равенства, а все, что относится к другой переменной (y) – в другой части равенства;
- проинтегрировать обе части равенства и записать решение в виде y=f(x);
- выполнить проверку.

Основные типы дифференциальных уравнений и способы их решения

- уравнение вида y'= f(x).

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$dy = f(x) \cdot dx$$

$$\int dy = \int f(x) dx$$

$$y = F(x) + c$$

- уравнение вида y'= f(y).

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

$$\frac{dy}{f(y)} = dx$$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx$$

$$F(y) = x + c$$

- уравнение с разделяющимися переменными вида

$$f_1(x)\Psi_1(y)dx+f_2(x)\Psi_2(y)dy=0$$

$$f_1(x)\cdot\Psi_1(y)\cdot dx+ f_2(x)\cdot\Psi_2(y)\cdot dy=0$$

$$f_1(x)\Psi_1(y)\cdot dx=-f_2(x)\cdot\Psi_2(y)\cdot dy$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\frac{\Psi_2(y)}{\Psi_1(y)}dy$$

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\int\frac{\Psi_2(y)}{\Psi_1(y)}dy$$

$$F(x)+c=F(y)$$

Заключение

Нами рассмотрены:

- понятия неопределенного и определенного интегралов, а также показаны на примерах способы их решения;
- виды дифференциальных уравнений, алгоритмы их решения.

Тест-контроль

Порядок дифференциального уравнения определяется порядком входящей в него:

1. функции
2. аргумента
3. высшей производной
4. низшей производной

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Обязательная:

1. Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики: учебник для мед.вузов.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2007.-

Дополнительная:

1. Математика в примерах и задачах: учебное пособие /Л.Н.Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В.Никонова и др.- М.: ИНФРА-М, 2010.-
2. Шаповалов К.А. Основы высшей математики: учебное пособие. -Красноярск: Печатные технологии, 2004
3. Математика: метод. указания к внеаудит. работе для студ. по спец. – педиатрия /сост. Л.А.Шапиро и др.- Красноярск: тип.КрасГМУ, 2009.-

Электронные ресурсы:

1. ЭБС КрасГМУ
2. Ресурсы интернет