

**ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
ДИСЦИПЛИНЫ
«МАТЕМАТИКА, СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПСИХОЛОГИИ»
(Специальность 37.05.01-клиническая психология)**

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №15

ТЕМА: Дискретные и непрерывные случайные величины (СВ). Законы распределения случайных величин.

Законы распределения случайных величин

Случайной величиной называется величина (событие), которая в результате опыта может принять то или иное значение, какое именно – заранее неизвестно.

Принято различать случайные величины *дискретного* и *непрерывного* типов. Возможные значения дискретных величин могут быть заранее перечислены. Возможные значения непрерывных величин не могут быть заранее перечислены и непрерывно заполняют некоторый промежуток.

Примеры дискретных случайных величин:

- число появлений герба при трех бросаниях монеты (возможные значения 0, 1, 2, 3);
- число особей, обладающих определенным признаком (выражается целым числом);
- число зерен в колосе и т. п.

Примеры непрерывных случайных величин:

- расстояние от точки попадания до центра мишени;
- ошибка в измерении расстояния;
- количество вредных веществ в воздухе и т.п.

Законом распределения дискретной случайной величины (ДСВ) X называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными

значениями случайной величины $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и соответствующими им вероятностями $(p_1, p_2, \dots, p_n)$. При этом:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Данное соотношение называется *условием нормировки*.

Простейшей формой задания этого закона является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности:

Возможное значение X	X_1	X_2	...	X_n
Вероятность	p_1	p_2	...	p_n

Такая таблица называется *таблицей распределения (вероятностей)* случайной величины X .

Пример. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	-2	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

Построить закон распределения случайной величины $Y = X^2 + 1$.

Решение. Значение $Y = 1$ наступает только в случае, когда $X = 0$ с вероятностью 0.3. Значение 2 величина Y принимает, если величина X принимает значения -1 или 1 с вероятностями 0.2 и 0.3, соответственно. Тогда эти вероятности необходимо сложить, что даст $P(Y = 2) = 0.5$. Аналогично вероятность того, что $Y = 5$, будет равна $0.1 + 0.1 = 0.2$. Следовательно, закон распределения случайной величины $Y = X^2 + 1$ имеет вид:

Y	1	2	5
P	0.3	0.5	0.2

Некоторые законы распределения вероятностей дискретных случайных величин часто встречаются при решении различных задач.

Например, закон распределения называется *биномиальным законом распределения вероятностей* - $P_n(m)$ -, если событие A наступило m раз в n испытаниях, $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Пример. Появление колонии микроорганизмов данного вида в определенных условиях оценивается вероятностью 0,7. Составить распределение количества колоний микроорганизмов в шести наугад взятых пробах.

Решение. ЗР случайной величины X подчиняется биномиальному закону и выглядит следующим образом:

X_i	0	1	2	3	4	5	6
$P_6(X_i)$	$P_6(0)$	$P_6(1)$	$P_6(2)$	$P_6(3)$	$P_6(4)$	$P_6(5)$	$P_6(6)$

$p=0,7$; $q=0,3$. Найдем эти вероятности:

$$P_6(0) = (0,3)^6 = 0,0007$$

$$P_6(1) = 6 \cdot 0,7(0,3)^5 = 0,01$$

$$P_6(2) = 15(0,7)^2(0,3)^4 = 0,057$$

$$P_6(3) = 20(0,7)^3(0,3)^3 = 0,18$$

$$P_6(4) = 15(0,7)^4(0,3)^2 = 0,32$$

$$P_6(5) = 6(0,7)^5 \cdot 0,3 = 0,30$$

$$P_6(6) = (0,7)^6 = 0,11$$

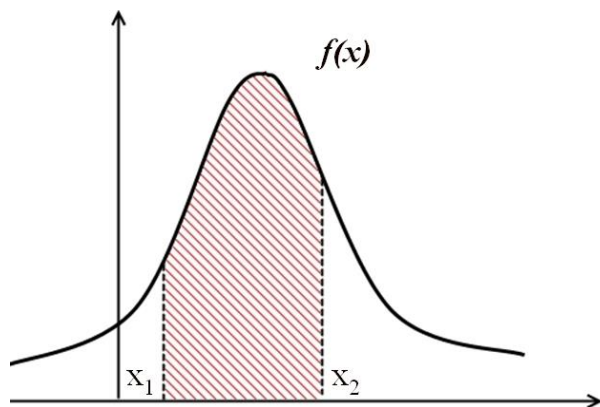
Непрерывные случайные величины

По определению случайные величины непрерывного типа характеризуются тем, что непрерывно заполняют некоторый промежуток, например, такими величинами являются ошибки измерения, антропометрические данные и т.д. Для непрерывной случайной величины имеет смысл рассматривать только такое событие, как *попадание в интервал, а не попадание в отдельную точку*, так как *вероятность попадания непрерывной случайной величины в любую*

заранее заданную точку равна нулю.

Будем обозначать эту вероятность через $P(x_1 < X < x_2)$. Эта

вероятность может быть представлена в виде интеграла от некоторой функции $f(x)$ – *плотности распределения вероятностей*, и



имеет геометрический смысл площади под кривой распределения $f(x)$ (розовая штриховка на рисунке):

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Плотностью распределения вероятностей (или дифференциальной функцией распределения) называется отношение вероятности $P(x_1 \leq x \leq x_2)$ попадания случайной величины x в тот или иной интервал Δx ее значений к величине этого интервала:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_1 \leq x \leq x_2)}{\Delta x}$$

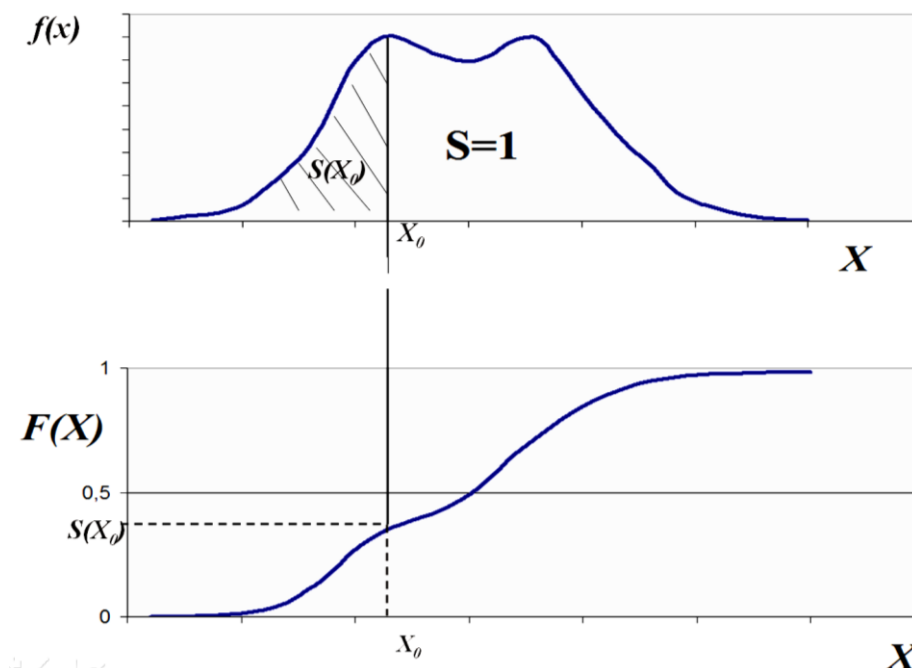
При этом функция $f(x)$ по сути неотрицательна и отвечает условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

При этом интегральная функция $F(X)$ называется функцией распределения вероятности случайной величины и определяется как

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = P(-\infty < X < x)$$

Она имеет смысл «накопленной вероятности»:



$f(x)=F'(x)$. Поэтому $f(x)$ называется дифференциальной функцией распределения, а $F(x)$ —интегральной функцией распределения.

Пример: Задана функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \frac{cx^2}{4} & \text{при } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти: а) значение c , б) функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$, в) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;1)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: Константу C находим из условия: $\frac{c \cdot x^2}{4} = 1$, при $x=2$.

$$\frac{c \cdot 2^2}{4} = 1, \text{ следовательно, } c = 1.$$

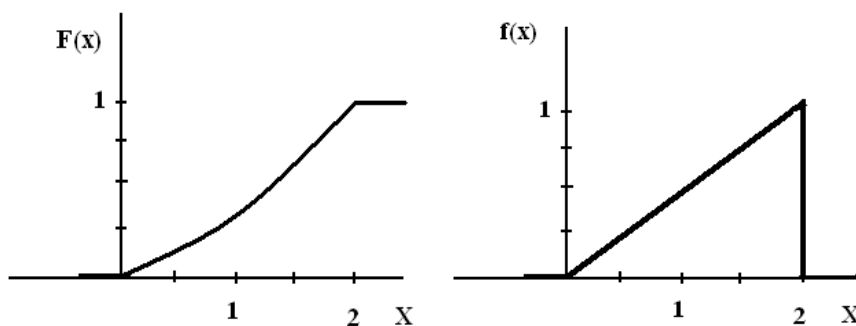
Функция плотности распределения вероятностей на промежутке $[0,2]$ равна $f(x) = F'(x) = (cx^2/4)' = x/2$, и задается:

$$f(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;1)$:

$$F(1) - F(0) = \frac{1 \cdot 1^2}{4} - \frac{1 \cdot 0^2}{4} = \frac{1}{4}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$:

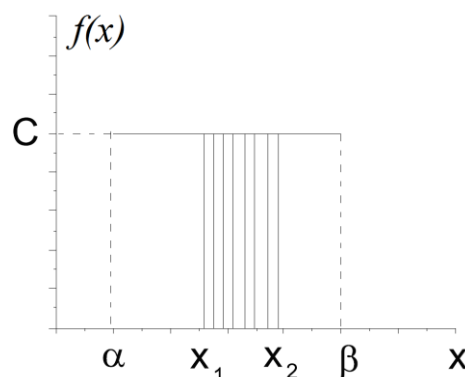


Равномерное распределение

Говорят, что случайная X распределена равномерно в конечном интервале α, β , если все ее возможные значения сосредоточены на этом

интервале и плотность распределения ее вероятностей на этом интервале постоянна:

$$f(x) = \begin{cases} C, & \text{при } \alpha < x < \beta, \\ 0, & \text{вне интервала } (\alpha, \beta). \end{cases}$$



Для случайной величины X , равномерно распределенной в интервале (α, β) , вероятность попадания в любой интервал (x_1, x_2) , лежащий внутри интервала (α, β) , пропорциональна длине этого интервала:

$$P(x_1 < X < x_2) = C(x_2 - x_1).$$

Параметр C определяется из условия нормировки:

$$P(\alpha < X < \beta) = C(\beta - \alpha) = 1,$$

откуда

$$C = \frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Окончательно вероятность попадания значения равномерно распределенной величины X в интервал (x_1, x_2) равна отношению длины этого интервала к длине всего интервала:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{x_2 - x_1}{\beta - \alpha}.$$

Равномерное распределение возникает в задачах вида: «выберем точку X наудачу в интервале (α, β) ».

Равномерно распределенными можно считать следующие события:

1. Время прихода пациента к врачу;
2. Величина износа в определенном месте протектора колеса и т.п.

Пример. Поезда метрополитена идут с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в некоторый момент времени. Найти плотность распределения СВ времени t , в течение которого ему придется ждать поезда.

Решение. Данная СВ представляет собой случайную величину, распределенную с равномерной плотностью на участке (0,2) мин. Тогда, $f(x)=c$ и по условию нормировки равна 1/2. Для такого распределения, например, вероятность того, что он простоит не более 1 мин., равна

$$P(t \leq 1 \text{ мин.}) = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение дискретной и непрерывной случайной величины.
2. Что называется законом распределения вероятностей дискретной случайной величины?
3. Сформулируйте условие нормировки для ДСВ. Что такое полигон ДСВ.
4. Дайте определение функции распределения СВ.
5. Как построить ЗР при биномиальном распределении СВ?
6. Как связаны функция распределения и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины? Каковы их свойства? Условие нормировки для НСВ.
7. Как определить вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал?
8. Какими свойствами характеризуется равномерное распределение?

Задания для самоконтроля:

1. Даны законы распределения дискретной СВ. Найти вероятность p :

a)

X	-1	0	5	7
P	0,1	0,3	p	0,2

 ; b)

X	2	3	6	9
P	p	0,2	0,2	0,2

 ;

2. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления белого шара. Построить ряд, полигон и график функции распределения $F(x)$ случайной величины X —числа извлеченных шаров.
3. Если случайная величина распределена по закону:

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Построить ряд распределения случайной величины: $Y=2X$.

4. Статистика аудиторских проверок фармацевтической компании утверждает, что вероятность обнаружения ошибки в каждом проверяемом документе равна 0,1. Составьте закон распределения количества обнаруженных ошибок в 3-х документах.
5. Частица пролетает последовательно мимо 5 счетчиков. Каждый счетчик независимо от остальных отмечает ее пролёт с вероятностью 0,8. Составьте закон распределения количества счетчиков, отметивших пролет частицы. Частица считается зарегистрированной, если она отмечена не менее чем 2 счетчиками. Какова вероятность её зарегистрировать?
6. Задана функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2 \\ (x/2) - 1 & \text{при } 2 < x \leq 4 \\ 1 & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

Найти: а) Плотность распределения данной СВ; б) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;3)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Задана функция плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1 \\ \frac{k(x+2)}{4} & \text{при } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Найти: а) значение k ; б) функцию распределения вероятностей $F(x)$. Построить график функции $F(x)$.

8. Случайная величина равномерно распределена на интервале $(-1;3)$. Найти плотность распределения данной СВ, $F(x)$, вероятность попадания в интервал $(0,5)$.
9. Задана функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{25} & \text{при } 0 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Найти: а) Плотность распределения данной СВ; б) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;3)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

ЛИТЕРАТУРА:

Обязательная:

1. Кричевец, А. Н. Математика для психологов : учебник / А. Н. Кричевец, Е. В. Шикин, А. Г. Дьячков. - 4-е изд. - М. : Флинта, 2010. - 376 с.
2. Ганичева А.В., Козлов В.П. Математика для психологов. М.: Аспект-пресс, 2005, с.81-89.

Дополнительная:

1. Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики. М., ГЭОТАР-Медиа, 2007.
2. Журбенко Л. Математика в примерах и задачах. М.: Инфра-М, 2009.