Кафедра медицинской и биологической физики
КрасГМУ

Тема:

Определенный интеграл

Лекция №11

Для студентов 1 курса, обучающихся по специальности 30.05.03 – Медицинская кибернетика

Автор лекции: доцент, к.ф.-м.н. Шаповалов К.А.

Красноярск, 2020

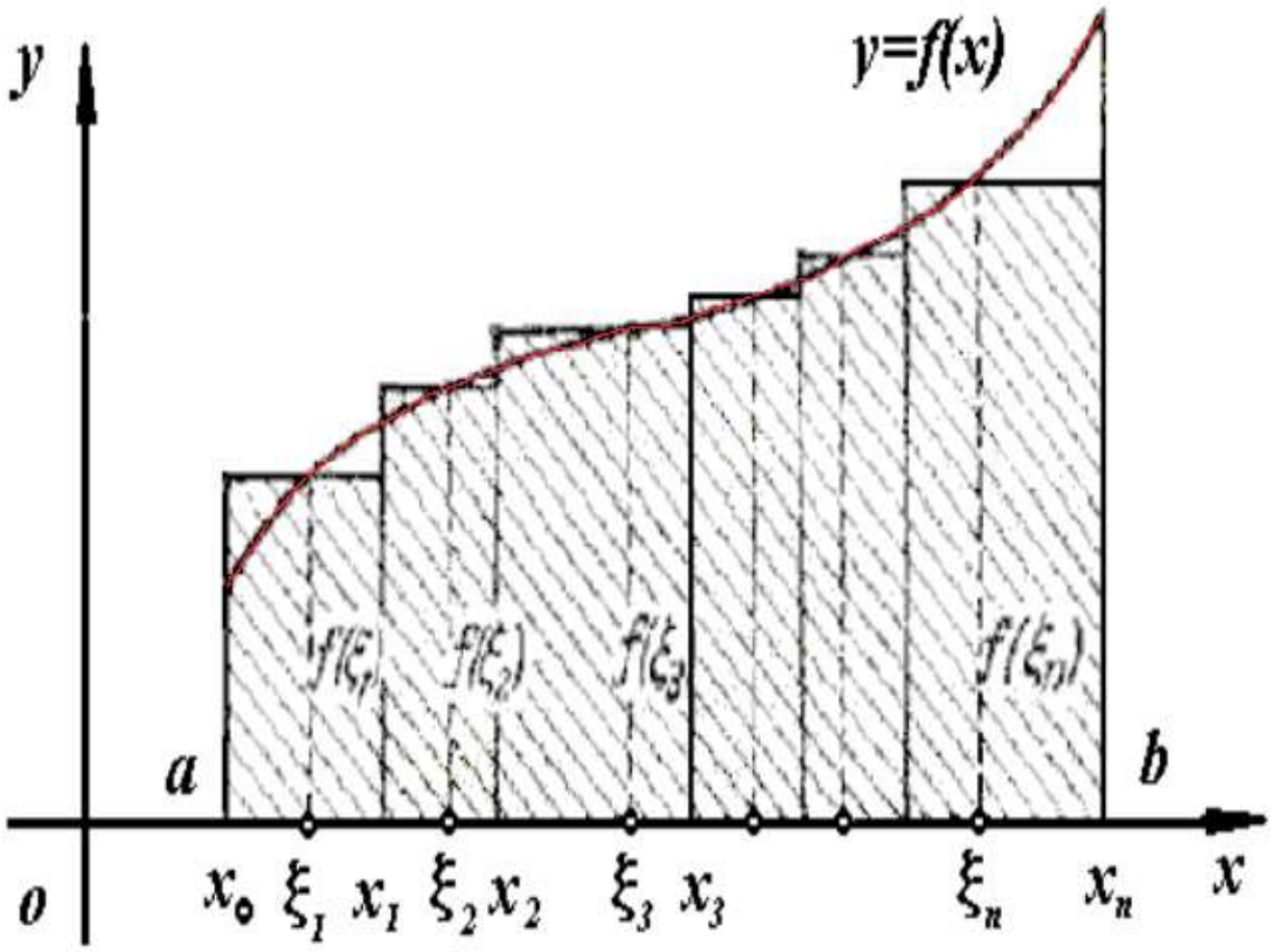
План

1. Предел интегральных сумм.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.
5. Приложения определенного интеграла.
6. Несобственные интегралы.
7. Методы приближенного вычисления определенных интегралов.

Цель лекции

Дать понятие и свойства определенного интеграла, основные приложения определенного интеграла.

Криволинейная трапеция



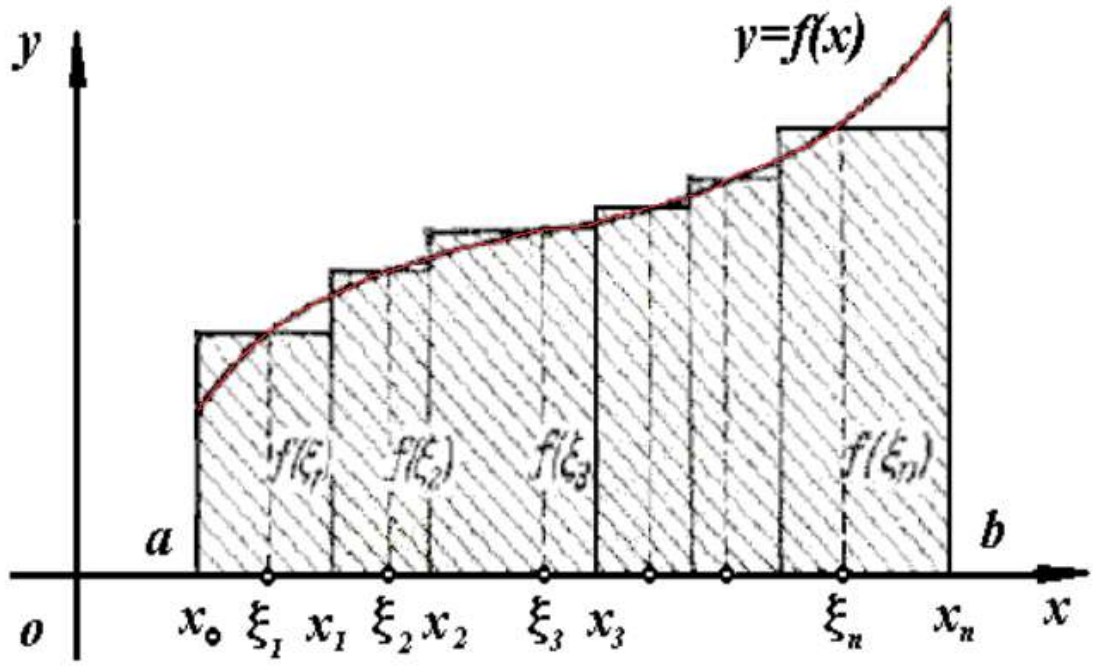
Рассмотрим отрезок **[a, b]** (**a < b**) и заданную на нём непрерывную неотрицательную функцию ***f (x)***. Фигура, ограниченная прямыми ***x = a, x = b, y = 0*** и кривой ***y = f(x)*** называется **криволинейной трапецией.**

Интегральная сумма

Сумма вида

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

где ξ_i – произвольная точка частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется **интегральной суммой** функции ***f(x)*** на отрезке **[a, b].**



Интегральная сумма (геометрический смысл)

Сумма $\mathbf{I_n}$ равна сумме площадей прямоугольников с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Будем Δx_i стремить к нулю. Если при этом величина $\mathbf{I_n}$ стремится к определенному пределу, то этот предел **S** называется площадью криволинейной трапеции.

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Определенный интеграл

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке **[a,b]** и на этом отрезке произвольно выбраны не совпадающие друг с другом точки x_0, x_1, x_2,…, x_n так, что $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ выбрано разбиение этого отрезка на **n** частей. В каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ **произвольным** образом выбрана точка ξ_i, $i=1, 2, \ldots n$.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке **[a, b]** называется предел $\mathbf{I_n}$ интегральных сумм функции $f(x)$ при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю.

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Определенный интеграл

Очевидно, геометрический смысл определенного интеграла - это площадь ***криволинейной трапеции***, ограниченной:

1. графиком функции ***f(x)***,

2. двумя прямыми (***x=a, x=b***), проведенными параллельно оси **Oy** в точках **a** и ***b*** оси абсцисс,

3. осью абсцисс (**y=0**).

Свойства определенного интеграла

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке **[a,b]**, тогда

1. Если пределы интегрирования меняем местами **a<b,** то меняем знак: $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Одинаковые пределы **a=b:** $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. $$\int_a^b B \cdot f(x)dx = B \cdot \int_a^b f(x)dx$$, где **B** - постоянная величина.

4. $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Свойства определенного интеграла

Теорема 2. Если функция ***f(x)*** интегрируема на отрезке **[a, b],** то она ограничена на этом отрезке.

Но ограниченность функции не является достаточным условием для ее интегрируемости (например, функция Дирихле).

Теорема 3. Если функция ***f(x)*** непрерывна на отрезке **[a, b],** то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 4. Функция ***f(x)***, ограниченная на **[a,b]** и имеющая конечное число точек разрыва (кусочно-непрерывная) является интегрируемой.

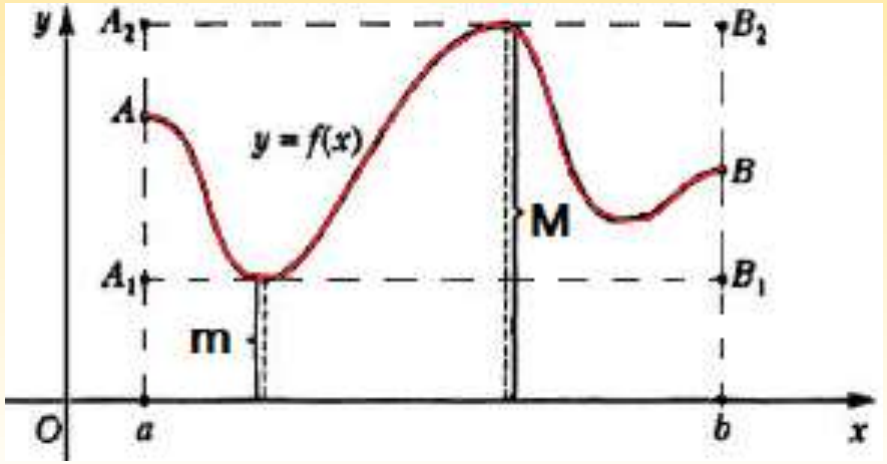
Свойства определенного интеграла

Теорема 5. Если на отрезке **[a, b],** функции ***f(x)*** и ***g(x)*** удовлетворяют условию $f(x) \le g(x)$, то:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Теорема 6. Если **m** и **M** – наименьшее и наибольшее значения (точные грани) функции ***f(x)*** на отрезке **[a, b],** и **a ≤ b** то:

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$



Свойства определенного интеграла

Теорема 7. (первая формула среднего).
Если на отрезке **[a, b]** функция ***f(x)*** непрерывна и имеет точные грани **m** и **M**, то на этом отрезке найдется такое число, удовлетворяющее неравенствам **m≤μ≤M** или точка **ξ∈[a,b]** такая, что ***f(ξ)=μ***, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) = f(\xi)(b-a)$$

Теорема 8. Для любых трех чисел ***a<c<b*** справедливо равенство:
если эти интегралы существуют

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Свойства определенного интеграла

Теорема 9. (вторая формула среднего, формула Бонне). Если на отрезке **[a, b]** функция ***f(x)*** интегрируема, а ***g(x)*** монотонна, отрезке найдется такое число, **ξ∈[a,b]**, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$$

Интеграл с переменным верхним пределом Φ(x)

Пусть на отрезке **[a,b]** задана интегрируемая функция ***f*(x),**

Пусть $x \in [a,b]$, будем в интеграле $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ менять верхний предел **b,** как переменную **x**, тогда получим функцию **Φ(*x*)**:

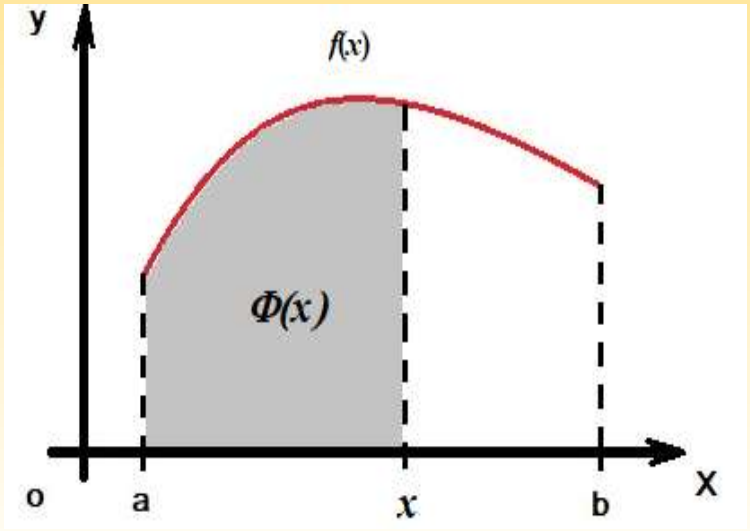
$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$

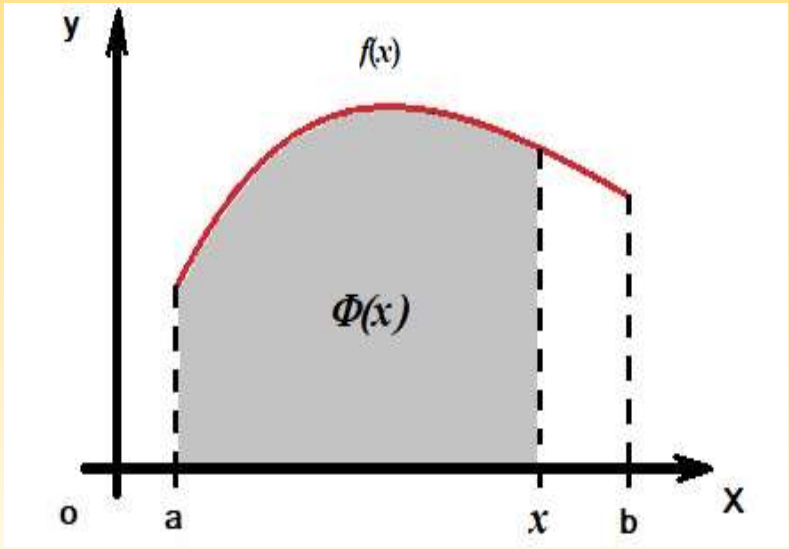
$$\Phi(a) = \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

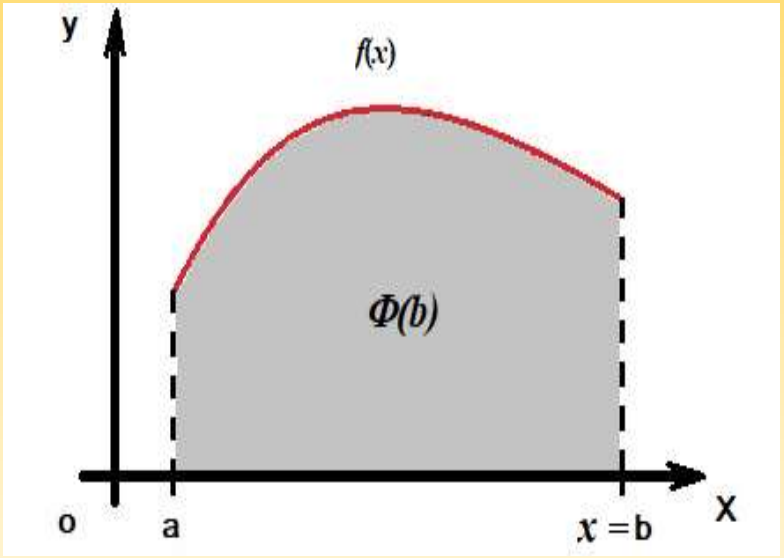
$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Интеграл с переменным верхним пределом

Если $f(x) > 0$, то значение функции $\Phi(x)$ численно равно площади криволинейной трапеции







Интеграл с переменным верхним пределом

Теорема 10. Если функция ***f(x)*** непрерывна на промежутке **[a, b],** то интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

имеет производную, равную значению подынтегральной функции при верхнем пределе, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$. Следовательно, $\Phi(x)$ есть первообразная функции $f(x)$.

Интеграл с переменным верхним пределом

Замечание.

Интегралы с переменным верхним пределом часто используют для определения новых функций, которые не выражаются через элементарные функции. Например,

Интеграл Пуассона: $$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

или интеграл Френеля: $$C(x)=\int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathrm{d}t$$

или эллиптический интеграл 1 рода: $$F(\theta,k)=\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Формула Ньютона-Лейбница

Если непрерывная функция ***f(x)*** имеет первообразную ***F(x)***, то для нахождения определенного интеграла используют формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x)\Big|_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Примеры использования формулы Ньютона-Лейбница

1. $f(x)=1$ $\int_a^b dx = b-a$

2. $f(x)=\cos x$ $\int_a^b \cos x\,dx = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a$

3. $f(x)=1/x$ $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

Замена переменных в определенном интеграле

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Если $x=\varphi(t)$ и

1. $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $a\le\varphi(t)\le b$
2. $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$
3. $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Замена переменных в определенном интеграле

Например

$$\int_1^2 \ln x \frac{\mathrm{d}x}{x} = \left| \begin{array}{ll} t(x) = \ln x & dt = \dfrac{dx}{x} \\ t(1) = 0 & t(2) = \ln 2 \end{array} \right| = \int_0^{\ln 2} t\,dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} \ln^2 2$$

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла

Пусть **u(x)** и **v(x)** непрерывно дифференцируемые функции на отрезке **[a,b]** тогда

$$\int_a^b u(x)\mathrm{v}'(x)dx = \left[u(x)\mathrm{v}(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{v}(x)u'(x)dx$$ или

$$\int_a^b u\mathrm{dv} = u\cdot \mathrm{v}\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{v}du$$

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла

Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} = \left[x \sin x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Приложения определенного интеграла

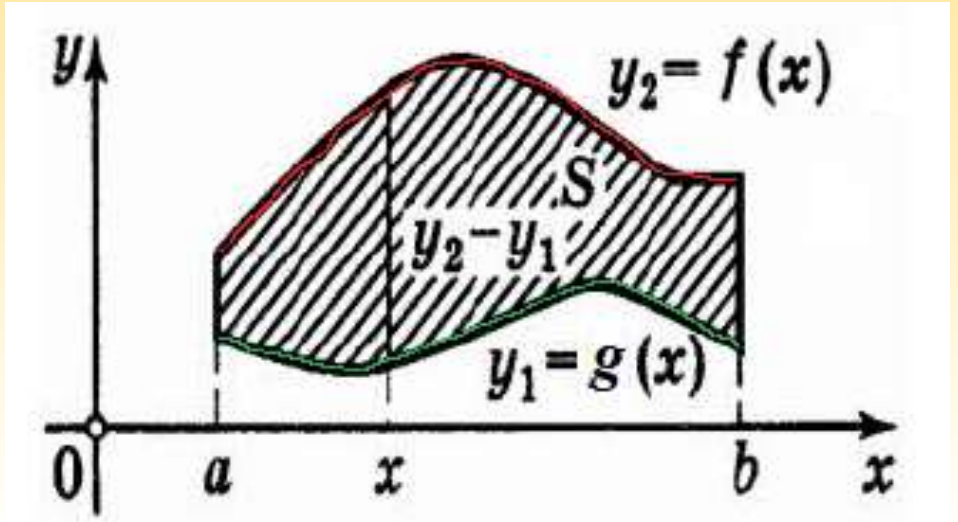
Площадь S фигуры в прямоугольных координатах

Площадь **S** фигуры, ограниченной двумя графиками неотрицательных функций ***f(x)*** и ***g(x)***, равна

где ***f(x)>g(x).***

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Следует учитывать возможные пересечения графиков!!!



Площадь S фигуры в прямоугольных координатах (отрицательные функции)

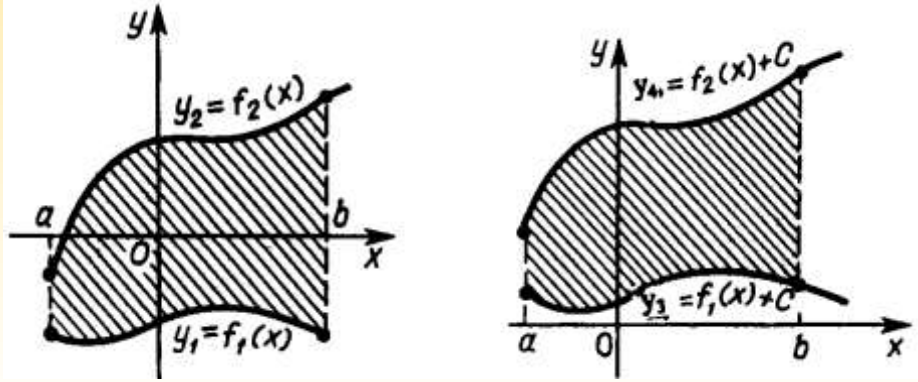
Если функция $f(x) \le 0$ на отрезке **[a,b]**, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le 0$$

тогда площадь криволинейной трапеции **S**:

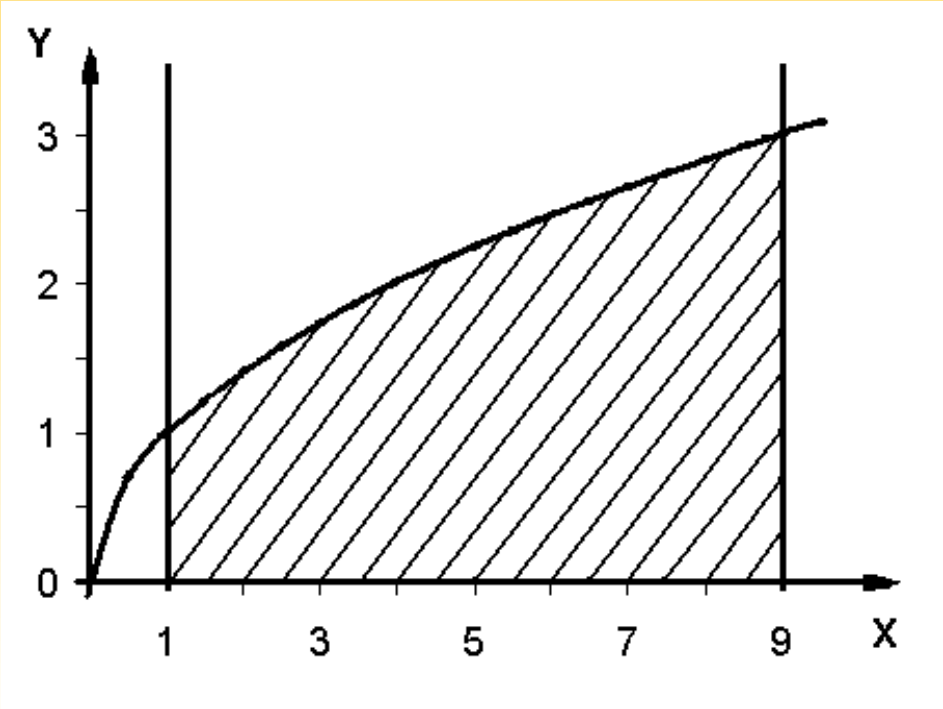
$$S = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

инвариантность площади относительно перемещений:



Площадь S фигуры в прямоугольных координатах

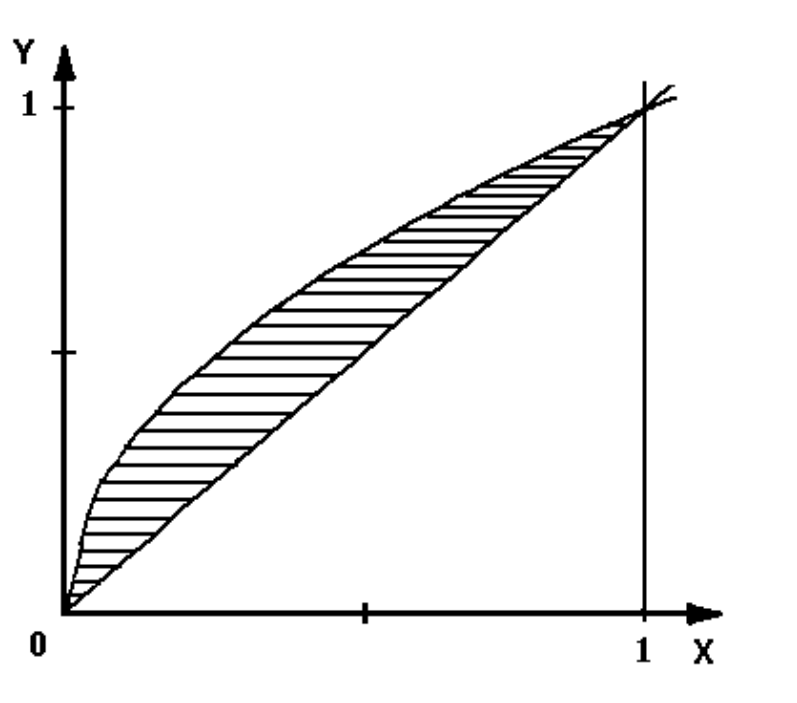
Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=9$



$$\int_1^9 \sqrt{x}dx = \frac{2x^{3/2}}{3}\Bigg|_1^9 = \frac{2}{3}\left(9^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{52}{3} \approx 17{,}333$$

Площадь S фигуры в прямоугольных координатах

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=x$



Сначала находим координаты точек пересечения графиков функций. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

Приравняем $x=\sqrt{x}$. Возводя обе части в квадрат, получим квадратное уравнение $x^2-x=0$. Поэтому, преобразуя как $x(x-1)=0$, будем иметь два корня $x_1=0$, $x_2=1$. Ясно, что на промежутке от **0** до **1** значения $\sqrt{x}$ всегда превышают x.

Площадь S фигуры в прямоугольных координатах

Таким образом, задача сводится к нахождению интеграла.

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x)\mathrm{d}x = \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}1^{3/2} - \frac{1^2}{2} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

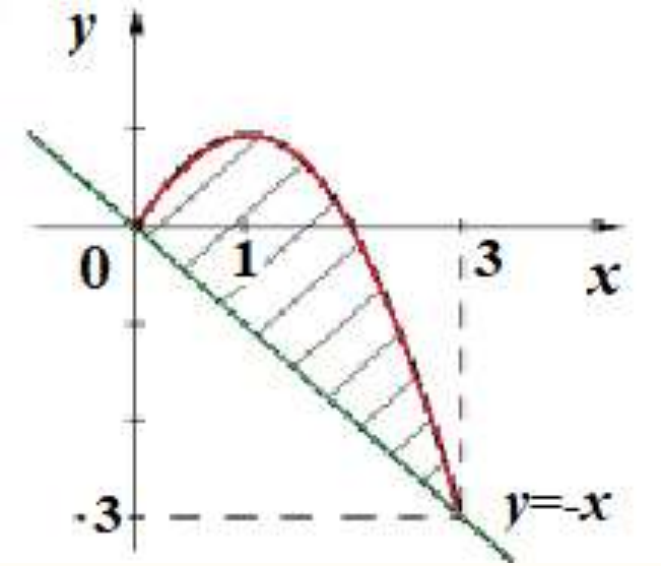
Площадь S фигуры в прямоугольных координатах

Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = -x$ от параболы $(x-1)^2=-y+1$.

Найдем точки пересечения параболы и прямой:

$$\begin{cases} y=-x \\ y=2x-x^2 \end{cases}$$

$$-x=2x-x^2 \Rightarrow 3x-x^2=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=3.$$

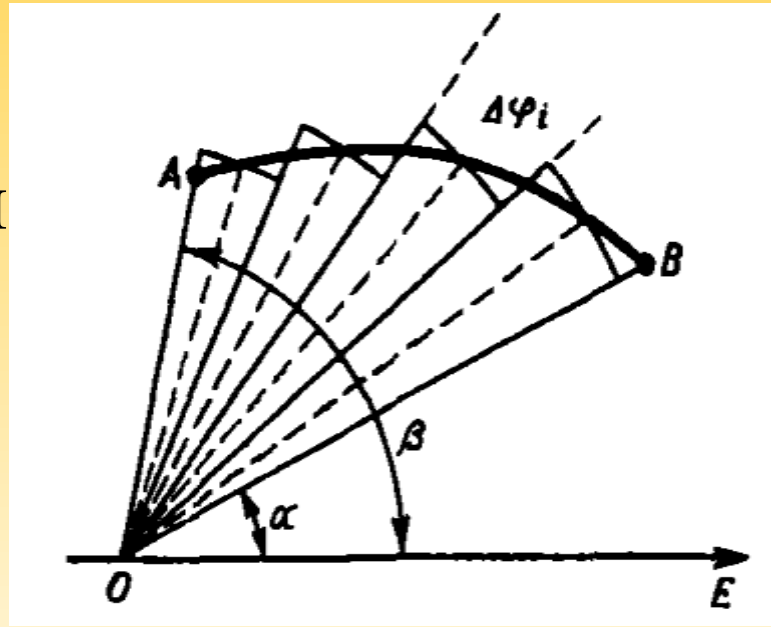


Так как на отрезке **[0, 3]** разность функций $2x-x^2-(-x)\geq 0$ положительна, то

$$\int_0^3 \left(2x-x^2-(-x)\right)dx = \int_0^3 \left(3x-x^2\right)dx = \frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$.



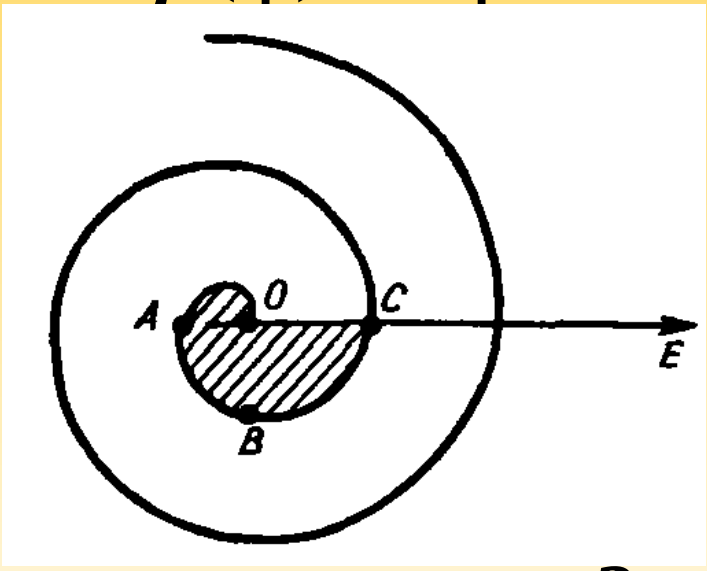
Плоскую фигуру, ограниченную кривой **AB** и двумя полярными радиусами, составляющими с полярной осью углы α и β, будем называть криволинейным сектором

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^{2}(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho(\varphi)=a\,\varphi$, где a—положительное число.

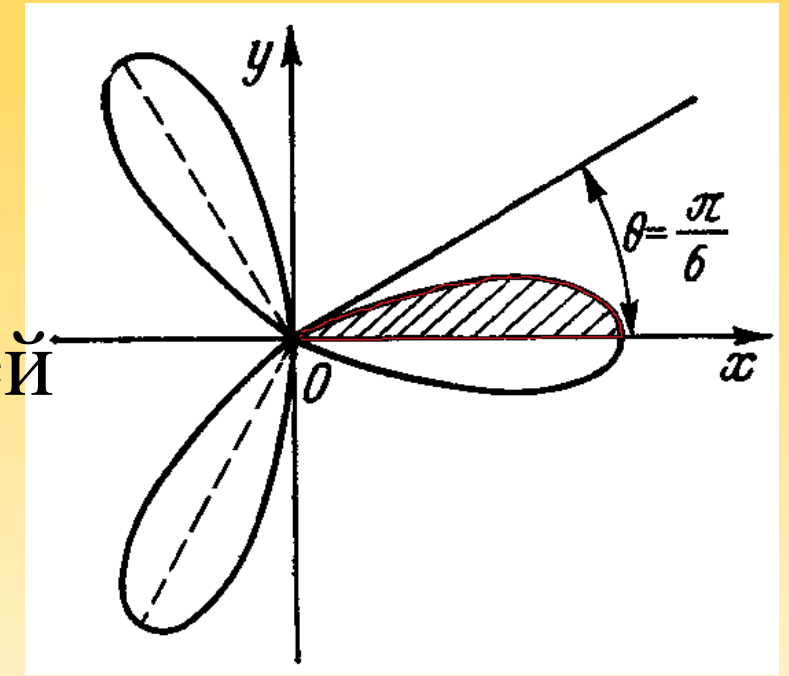
$$S=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2\,\mathrm{d}\varphi=\frac{a^2}{2}\,\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{4\pi^3a^2}{3}$$



Заметим, что точка **C** отстоит от полюса **O** на расстоянии $\rho=2\pi a$. Поэтому круг радиуса **OC** имеет площадь $\pi\cdot OC^2=4\,\pi^3a^2$, т.е. в 3 раза больше.

Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

Найти площадь трилистника **$\rho(\varphi)=a\cdot\cos(3\varphi)$.** Из рисунка можно заключить, что достаточно вычислить площадь части трилистника, отвечающей изменению **φ** от **0** до **$\pi/6$**, и полученный результат умножить на шесть.



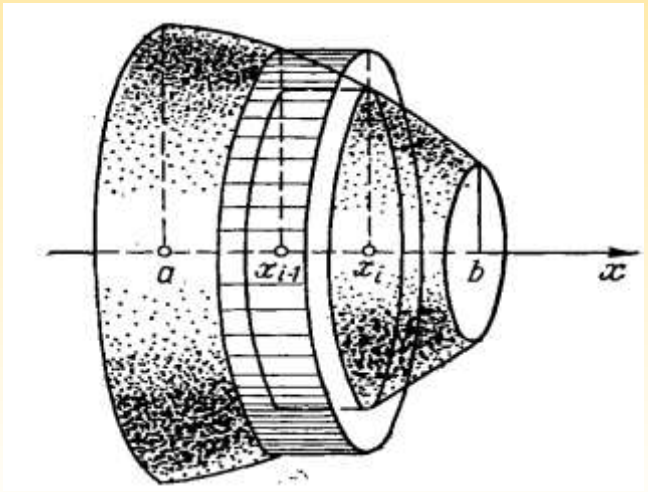
$$S=\frac{6a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi=3a^2\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sin 6\varphi}{12}\right)\Bigg|_0^{\pi/6}=\frac{\pi a^2}{4}$$

Объем тела с известной площадью сечения

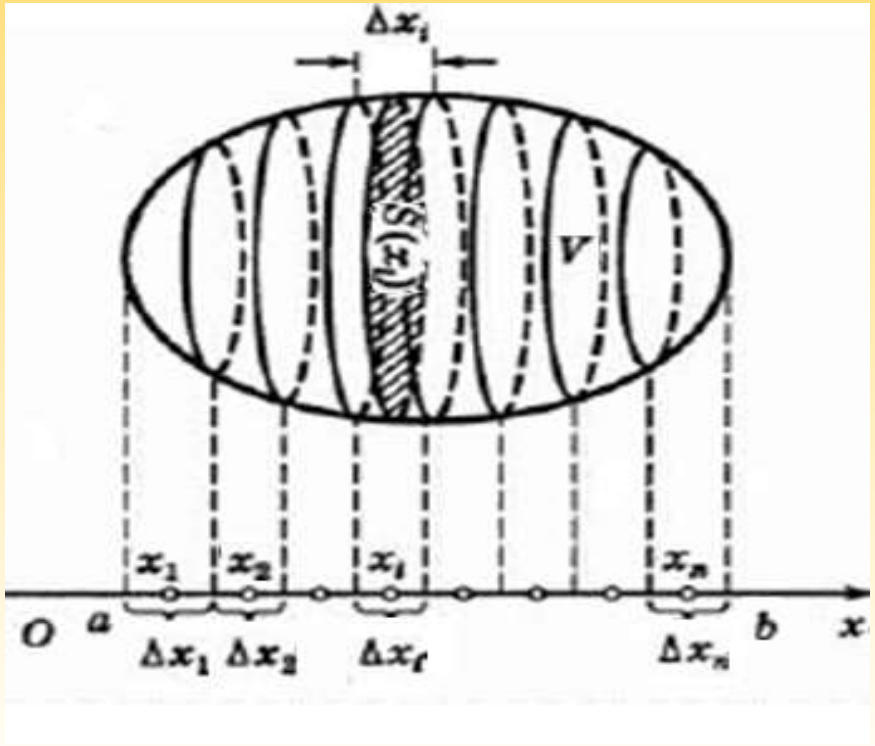
Объем тела с известной площадью сечения **S(*x*)**. Элемент объема **dV = S(*x*)d*x***. Объем тела

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

Объем тела вращения вокруг оси **OX** кривой ***f(x)***. Здесь **$S(x)=\pi f^2(x)$,** тогда



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$



Объем тела с известной площадью сечения

Вычислить объем шара радиуса **R.**

Шар радиуса **R** получается вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси **Ox**
Используя симметрию шара относительно оси Oy, находим

$$V = \pi \int_{-R}^{R} f^2(x)\mathrm{d}x = 2\pi \int_{0}^{R} \left(R^2 - x^2\right)\mathrm{d}x = 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Несобственные интегралы

1. Определим несобственный интеграл как

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b\to\infty) - \mathrm{F}(a)$$

Если предел существует, то интеграл «сходится», если нет, то «расходится».

2. Если подынтегральная функция имеет точку разрыва при $\boldsymbol{x = b}$, то несобственный интеграл определим так

$$\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x\to b) - \mathrm{F}(a)$$

Несобственные интегралы

Пример 1.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^{b} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg} 1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Пример 2.

$$\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{b\to 2-0} \int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{b\to 2-0} 2\sqrt{2-x}\Big|_0^{b} =$$

$$= -\lim_{b\to 2-0} \left(2\sqrt{2-b} - 2\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Несобственные интегралы

Пример 3.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to-0}\int_{-1}^{b}\frac{dx}{x^2}+\lim_{a\to+0}\int_{a}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to-0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{b}+\lim_{a\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{a}^{1}=$$

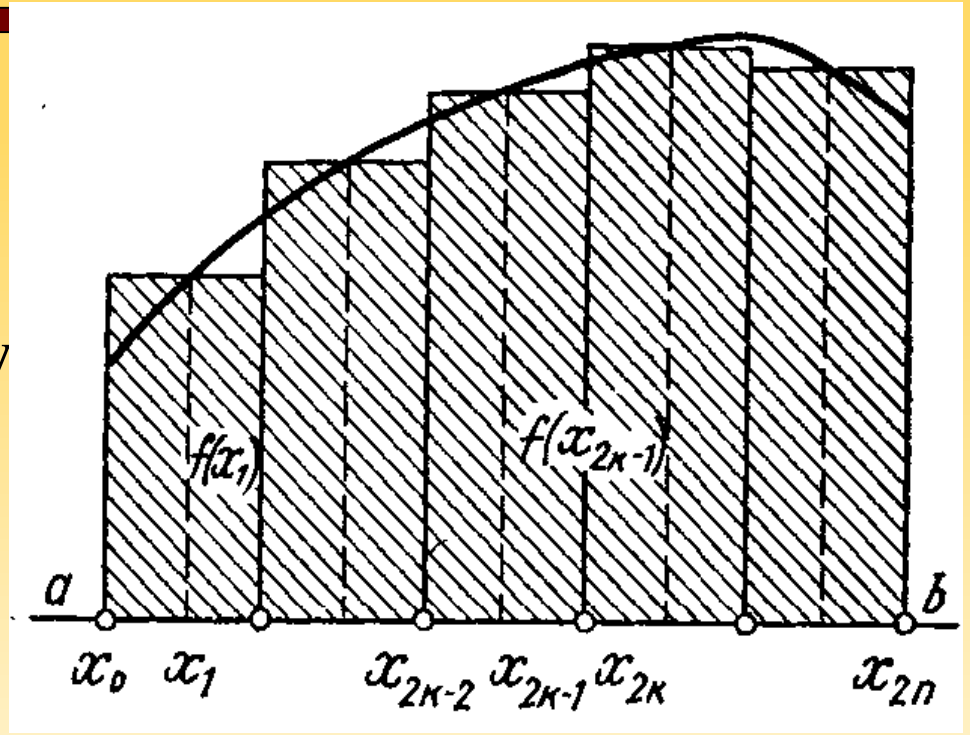
$$=\lim_{b\to-0}\left(-\frac{1}{b}-1\right)+\lim_{a\to+0}\left(-1+\frac{1}{a}\right)=\infty$$

Методы приближенного вычисления определенных интегралов

1. Метод прямоугольников

Разобьем отрезок **[a, b]** на **n** равных частей с длиной **h=(b-a)/n** с помощью точек $a=x_0<x_1<\ldots<x_{2n}=b$. Обозначим среднюю точку сегмента x_{2k-1} $[x_{2k-2}, x_{2k}]$.

Приближенно заменяем интеграл суммой площадей, указанных на рисунке прямоугольников высоты $f(x_{2k-1})$ и ширины **h**.



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1})\right]+R$$

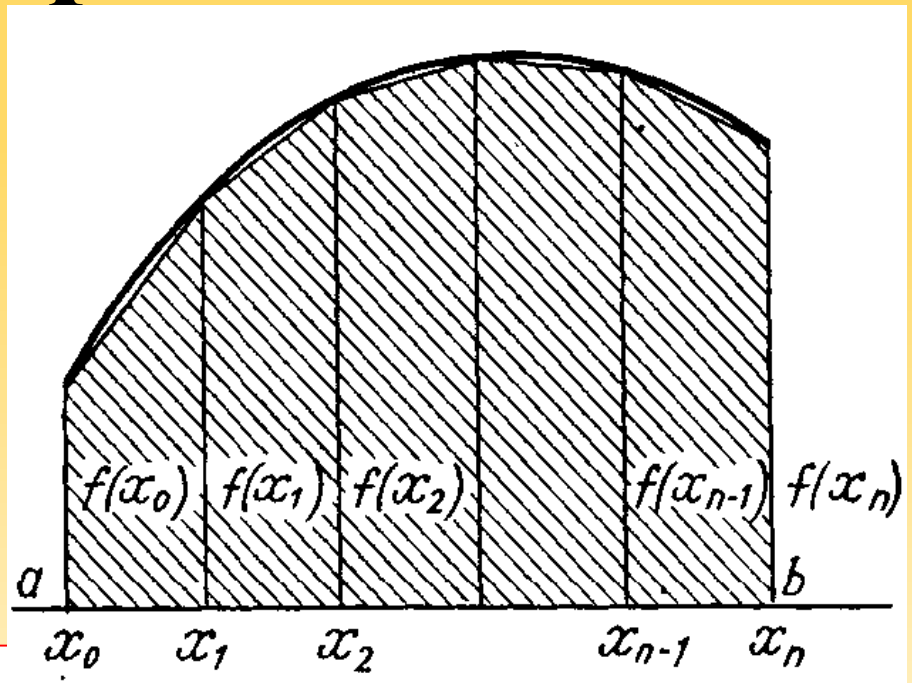
$$R=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\xi)$$

где R- остаточный член, $f''(\xi)$- вторая производная, ξ - точка на отрезке **[a,b]**

Методы приближенного вычисления определенных интегралов

2. Метод трапеций

Разобьем отрезок **[a, b]** на **n** равных частей с длиной **h=(b-a)/n** с помощью точек $a=x_0<x_1<\ldots<x_{2n}=b$. Приближенно заменяем интеграл суммой площадей, указанных на чертеже прямолинейных трапеций высотой **h**.



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2n}\left\{\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+\left[f(x_1)+f(x_2)\right]+\ldots+\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right]\right\}+R=$$

$$=\frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right\}+R$$

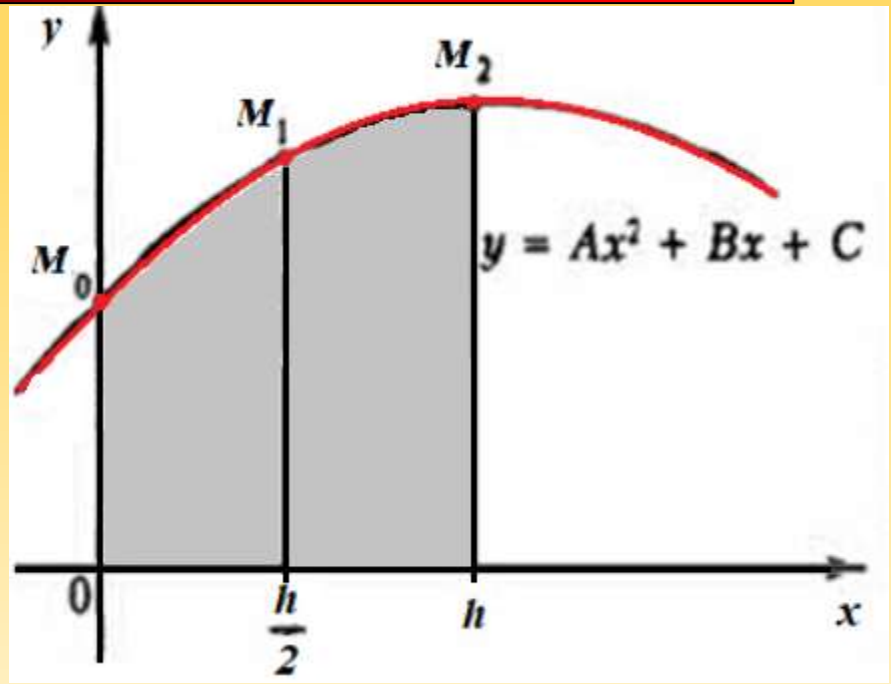
$$R=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)$$

, где ***R***- остаточный член, ξ - точка на отрезке **[a, b]**

Методы приближенного вычисления определенных интегралов

3. Метод парабол или Симпсона

Вычислим площадь, ограниченную дугой параболы проходящей через точки M_0, M_1, M_2 с ординатами y_0, y_1, y_2.



Уравнения для определения A, B, C следующие:

$$\begin{cases} y_0 = C \\ y_1 = A\dfrac{h^2}{4} + B\dfrac{h}{2} + C \\ y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{cases}$$

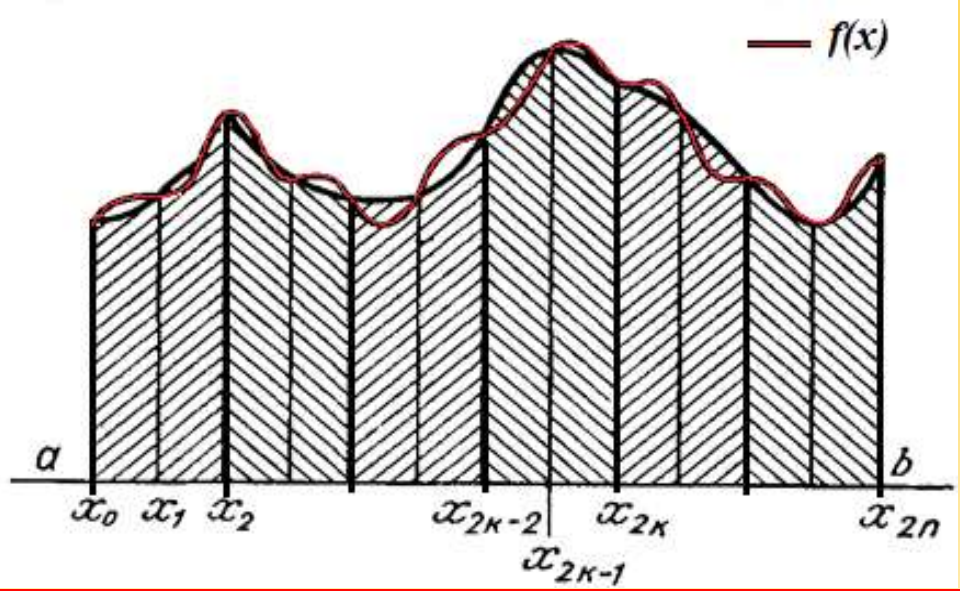
Площадь под параболой равна

$$\int_0^h \left(Ax^2 + Bx + C\right)\mathrm{d}x = \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch = \frac{h}{6}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

Методы приближенного вычисления определенных интегралов

3. Метод парабол или Симпсона

Разобьем отрезок **[a, b]** на **n** равных частей с длиной **h=(b-a)/n** с помощью точек $a=x_0<x_1<\ldots<x_{2n}=b$. Приближенно заменяем интеграл суммой площадей, заштрихованных на рисунке фигур, лежащих под параболами.



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left\{\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]+\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]+\ldots+\left[f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right]\right\}+R=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{2k})+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{2k+1})\right\}+R$$

$$R=-\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\xi)$$

где $f^{(4)}(\xi)$ – четвертая производная, ξ - точка на отрезке **[a, b]**

Заключение

Рассмотрены понятие и свойства определенного интеграла, а также основные приложения определенного интеграла.

Литература

основная

1. Математика: учеб. для студентов фармацевт. и мед. вузов/ Е.В. Греков - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2015.

дополнительная

1. Высшая математика /К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев - М.: Флинта, 2010.

2. Математика в примерах и задачах: учебное пособие /Л.Н.Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В.Никонова и др.- М.: ИНФРА-М, 2010.

электронные ресурсы

1. ЭБС КрасГМУ (http://www.krasgmu.ru)

2. Ресурсы Интернет

Благодарю за внимание !