

Лекция № 2
для студентов 1 курса обучающихся по специальности
37.05.01 – Клиническая психология (очная форма
обучения)

Элементы векторной алгебры

© **Составитель: доцент кафедры медицинской
и биологической физики,
к. ф.-м. н. Романова Н.Ю.**



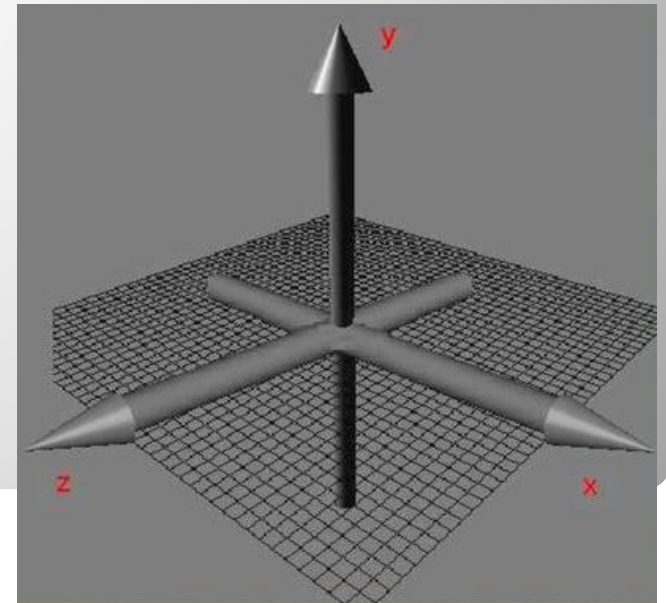
1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами.
2. Линейно зависимые и линейно независимые векторы.
3. Размерность линейного пространства.
4. Базис линейного пространства.
5. Нелинейные операции с векторами.

План лекции:

- Предметом изучения в векторной алгебре являются векторные величины(векторы) и действия с ними. Примерами таких величин могут служить скорость и ускорение движущейся точки, сила.
- Цифровые данные, используемые в различных областях, также можно представить в виде систем векторов.

Понятие вектора позволяет существенно упростить операции с большими структурированными наборами чисел.

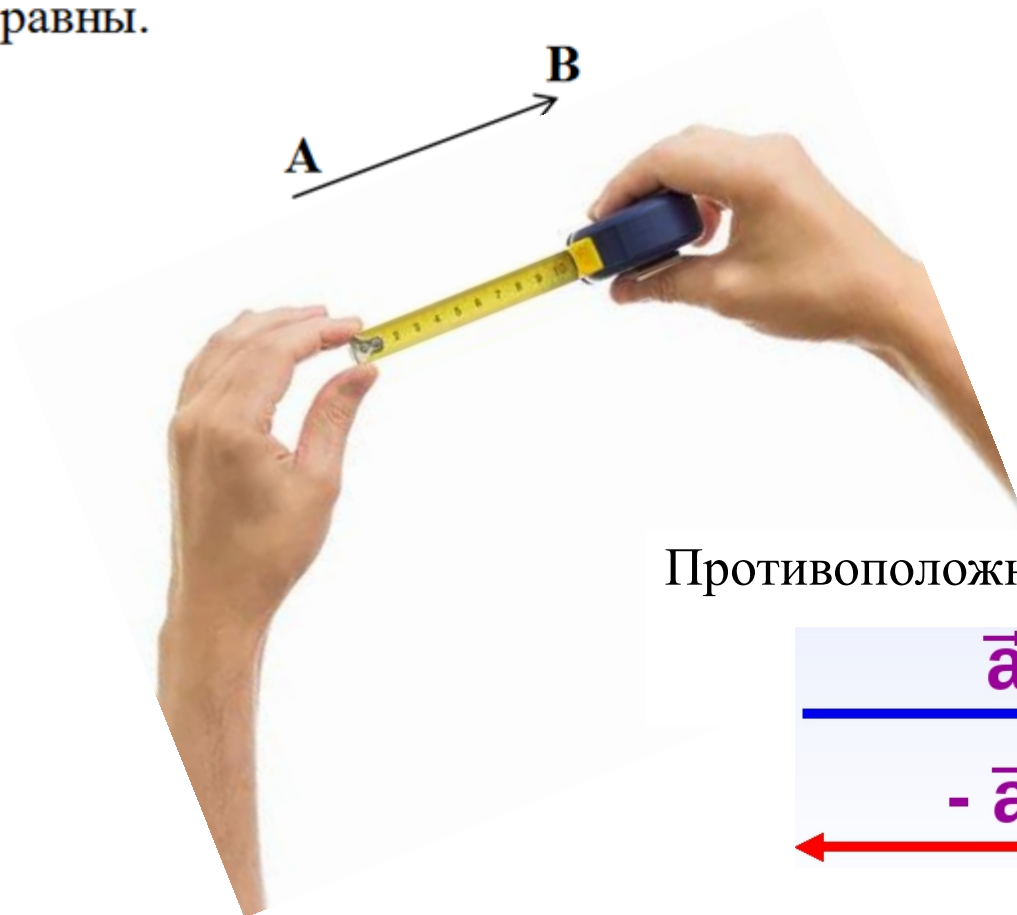
Актуальность темы



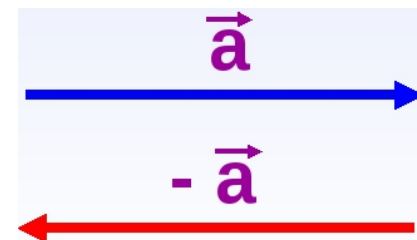
Вектором $\vec{AB}$ называется направленный отрезок с началом в точке А и концом в точке В.

Модулем вектора $|\vec{AB}|$ называется его длина.

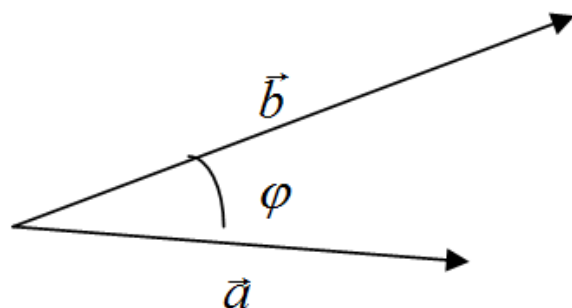
Два вектора называются *равными*, если их направления совпадают, а длины равны.



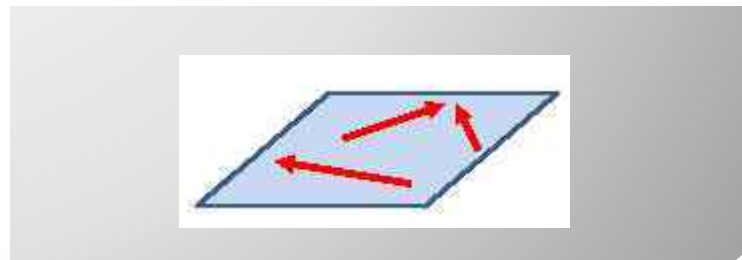
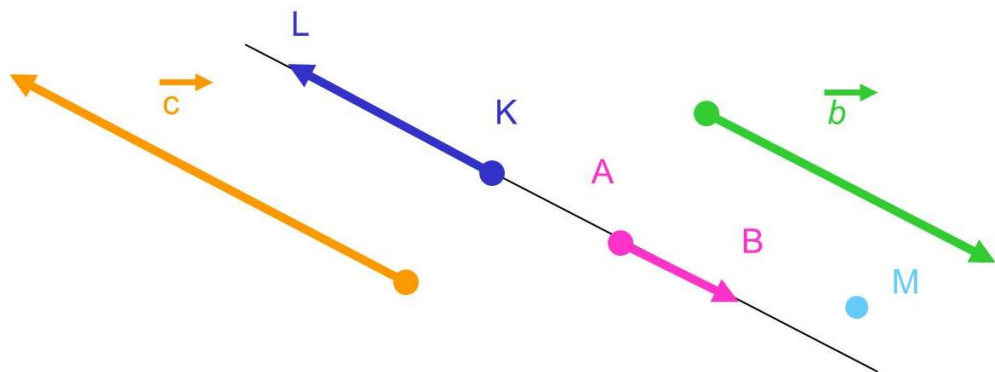
Противоположные векторы.

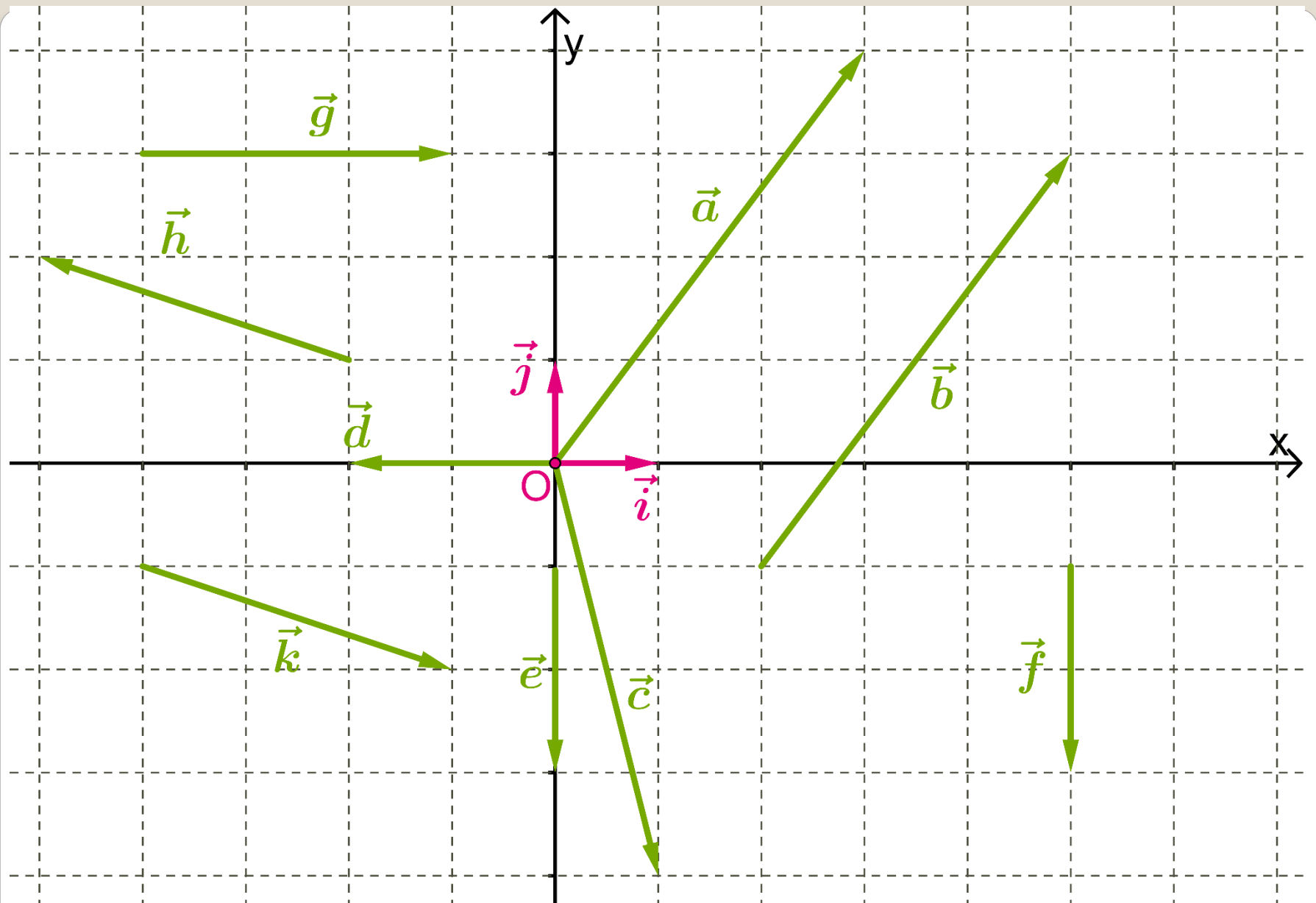


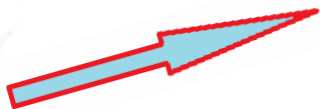
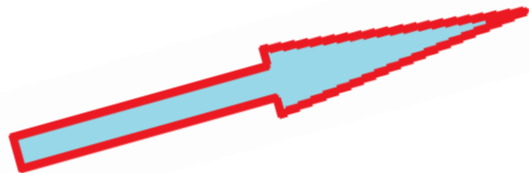
Углом между двумя векторами называется наименьший угол, на который нужно повернуть один из векторов до совпадения с направлением второго:



Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или параллельных прямых. Три вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной или в параллельных плоскостях.

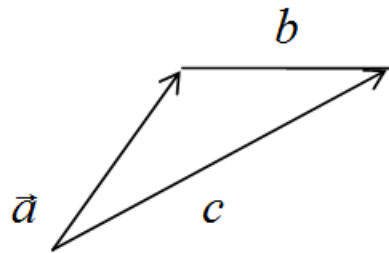




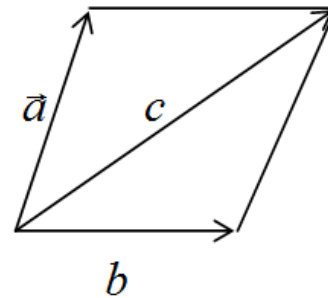


Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, который получается при совмещении конца вектора $\vec{a}$ с началом вектора $\vec{b}$. Тогда началом вектора $\vec{c}$ будет начало вектора $\vec{a}$, а концом вектора $\vec{c}$ - конец вектора $\vec{b}$.

- Сложение векторов по правилу треугольника и по правилу параллелограмма:



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Сложение векторов

Свойства суммы векторов:

1. Свойство коммутативности:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

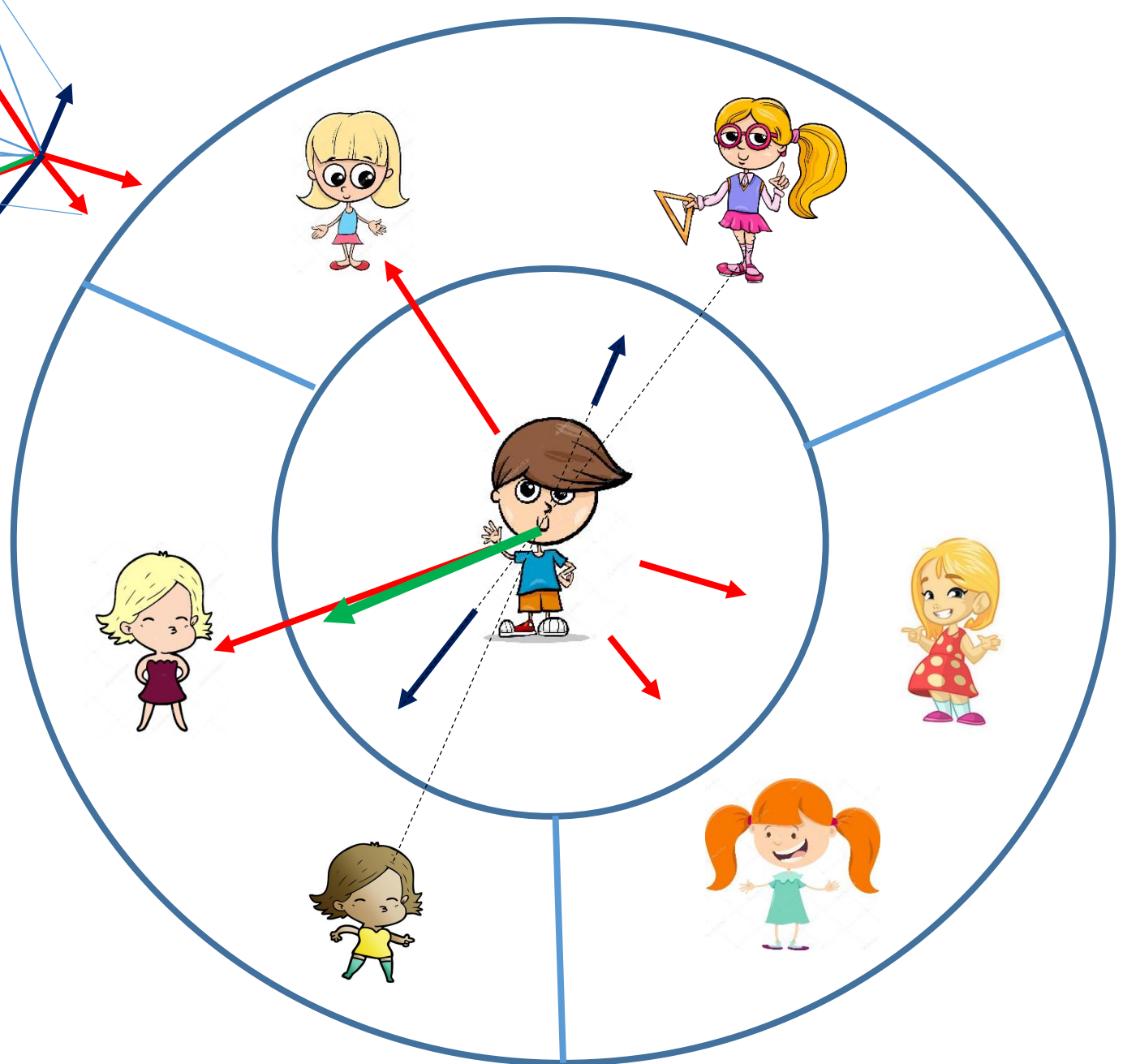
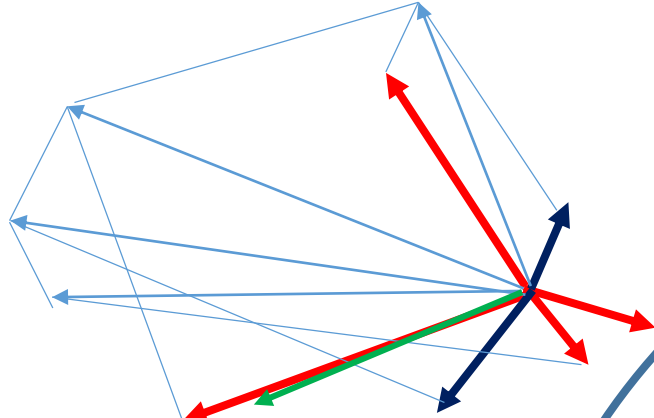
2. Свойство ассоциативности:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{b} + (\vec{a} + \vec{c})$$

3. $\vec{a} + 0 = \vec{a}$

4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$, где $(-\vec{a})$ - вектор противоположный $\vec{a}$,

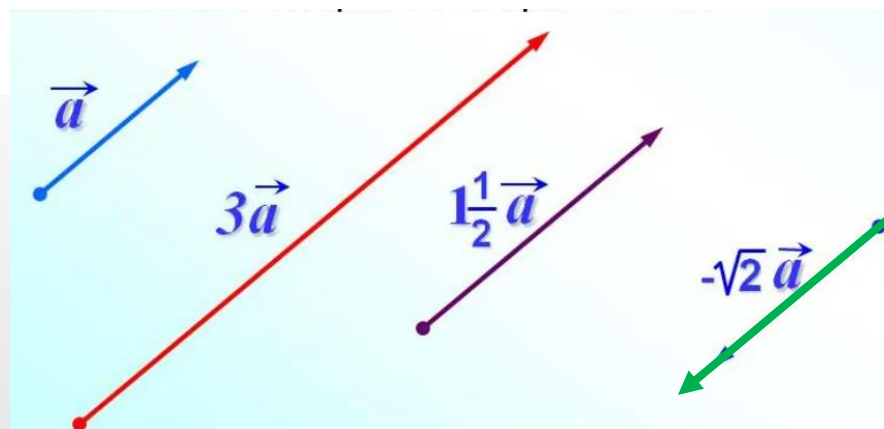
Свойства суммы векторов



Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, такой, что

$$|\vec{b}| = \lambda |\vec{a}|,$$

а его направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположно ему, если $\lambda < 0$.



Умножение вектора на число

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha,$$

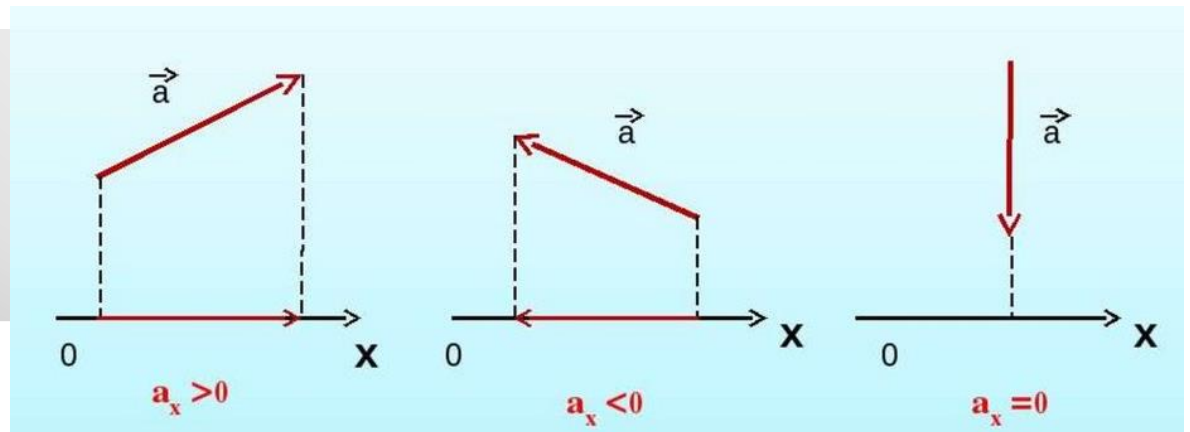
где α - угол между направлениями оси l и вектора $\vec{a}$

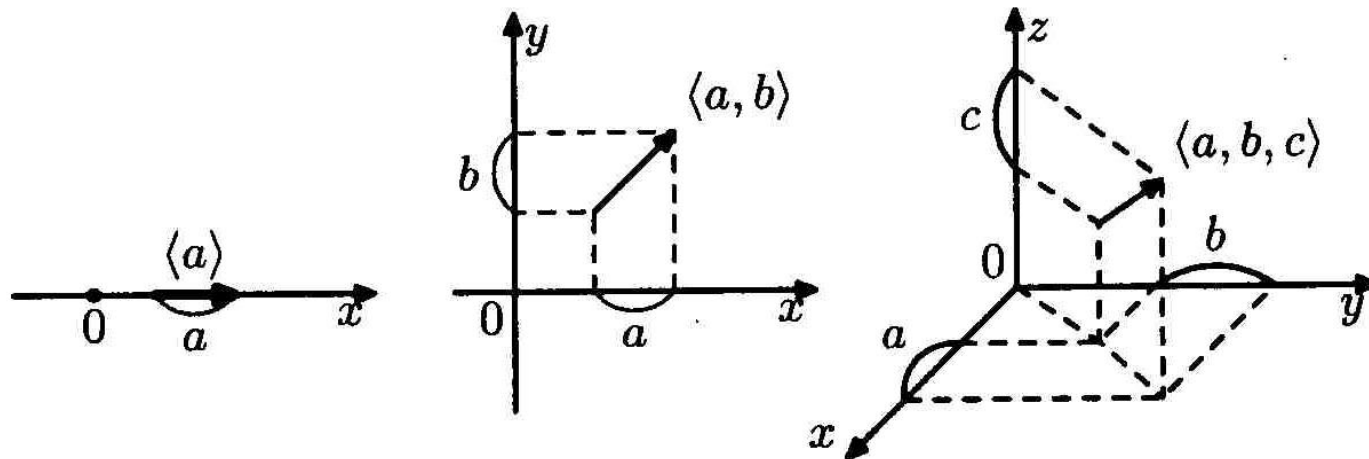
Свойства проекций:

$$1) \text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}$$

$$2) \text{пр}_l(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot \text{пр}_l \vec{a}, \text{ где } \lambda - \text{произвольное число.}$$

**Проекция
вектора**





Рассмотрим прямоугольную систему координат в трехмерном пространстве $OXYZ$. Вектору в данном пространстве соответствует **тройка чисел (a, b, c)** , являющихся проекциями вектора на оси Ox , Oy , Oz . Эти числа называются **координатами** вектора .

Числа x, y, z , получаются как разность соответствующих координат точек $A(x_0, y_0, z_0)$ и $B(x_1, y_1, z_1)$:

$$a = x_1 - x_0, \quad b = y_1 - y_0, \quad c = z_1 - z_0.$$

Таким образом, координаты вектора получаются вычитанием из координат его конца соответствующих координат начала.

Координаты вектора

Понятие вектора позволяет существенно упростить операции с большими структурированными наборами чисел или других объектов.

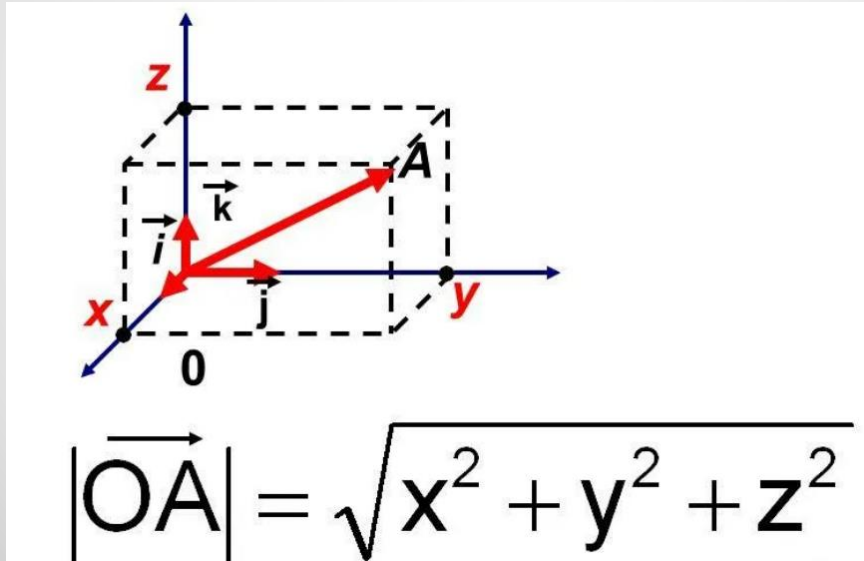
Можно определить вектор-столбец и вектор-строку

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}; \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Два вектора $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ называются **равными** в том и только том случае, если они имеют одинаковое число координат ($n = m$) и если их соответственные координаты равны между собой: $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$.

Длиной (модулем) вектора x в n -мерном пространстве называется число:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$



Длина вектора

Сумма векторов ***a*** и ***b*** определяется равенством

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

Например, $(1, -1, 0, 3, 8) + (4, 3, -3, -5, -7) = (5, 2, -3, -2, 1)$.

- **Произведением** вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ на число ***k*** (в координатной форме) называют вектор $k\mathbf{a}$, определяемый равенством $k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$.

Линейные операции с векторами

Множество L называют **линейным пространством** (или **векторным пространством**), а его элементы – **векторами**, если:

1. На этом множестве задана операция сложения: каждому двум векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из L сопоставлен некоторый третий вектор из L , обозначаемый $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и называемый суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
2. Задана операция умножения векторов на числа: каждой паре $\mathbf{a}, k$ (вектор $\mathbf{a}$ и число k) сопоставлен некоторый вектор, обозначаемый $k\mathbf{a}$ и называемый произведением вектора $\mathbf{a}$ на число k ;

Линейное пространство векторов

3. Эти операции удовлетворяют следующим требованиям:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ для любых трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$;
- существует единственный вектор $\mathbf{0}$ такой, что $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ для любого вектора $\mathbf{a}$;
- для любого вектора $\mathbf{a}$ существует единственный вектор $\mathbf{a}'$ такой, что $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{0}$;
- $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ для любого вектора $\mathbf{a}$;
- $k_1(k_2\mathbf{a}) = (k_1k_2)\mathbf{a}$ для любых чисел k_1 и k_2 и любого вектора $\mathbf{a}$;
- $(k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$ для любых чисел k_1 и k_2 и любого вектора $\mathbf{a}$;
- $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ для любого числа k и любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Линейное пространство векторов

- векторы плоскости (обозначение R^2)
- нашего пространства, в котором мы живем, его называют трехмерным (определяется тремя измерениями: длиной, шириной, высотой) и обозначают R^3

Обобщением этих пространств является пространство R^n векторов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, имеющих n координат (n -мерных векторов).

Примеры линейных пространств

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ – множество векторов из пространства L . Возьмем произвольные числа $k_1, k_2, \dots, k_p$ и составим вектор $\mathbf{a} = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_p k_p$.

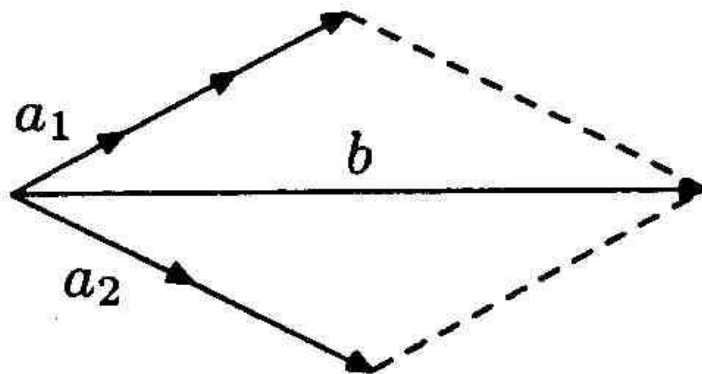
Любой вектор $\mathbf{a}$ данного вида называется **линейной комбинацией** векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$, а числа $k_1, k_2, \dots, k_p$ – коэффициентами этой линейной комбинации.

- $\mathbf{a}_1 = (2, -1, 4, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (3, -5, -2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 6, -8, 5)$, то линейная комбинация

$$\begin{aligned} 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 &= \\ &= (6, -3, 12, 0) - (6, -10, -4, 4) - (-3, 6, -8, 5) = \\ &= (3, 1, 24, -9). \end{aligned}$$

- вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, т.к. $\mathbf{b} = 3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$.

Пример



- Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ называются **линейно зависимыми** (или образующими **линейно зависимую систему**), если существуют такие числа $c_1, c_2, \dots, c_p$, не равные одновременно нулю, что справедливо равенство:

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_p \mathbf{a}_p = 0.$$

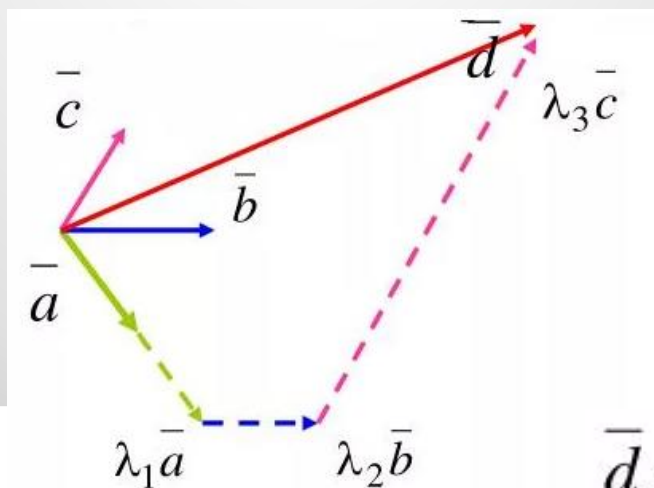
- Если же это равенство возможно только в случае $c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$, то векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ называются **линейно независимыми** (образующими **линейно независимую систему**).

Линейная зависимость векторов

- Для того, чтобы **два** вектора были **линейно зависимы**, необходимо и достаточно, чтобы они были **коллинеарны**.
- Для того чтобы **три** вектора были **линейно зависимы** необходимо и достаточно, чтобы они были **компланарны**.
- Любые четыре вектора линейно зависимы.

Линейная зависимость векторов

- Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией всех остальных.
- Линейное пространство L называется **n -мерным**, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ векторов являются линейно зависимыми.



$$\bar{d} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} + \lambda_3 \bar{c}$$

Теорема

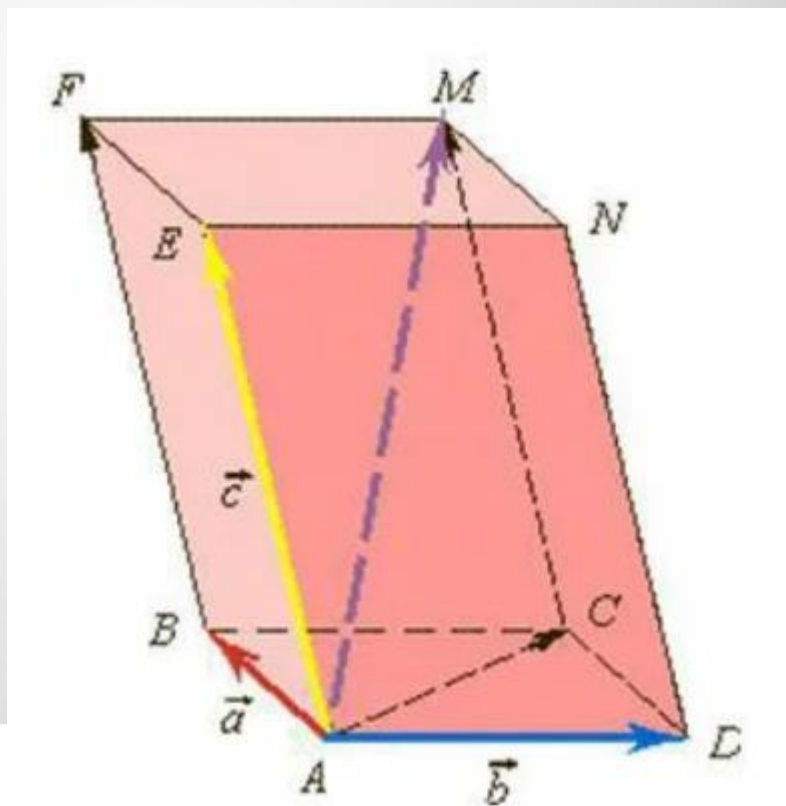
- **Базисом** n -мерного линейного пространства L называется любая упорядоченная система n линейно независимых векторов в пространстве R^n
- Пример такой системы в пространстве R^n :

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

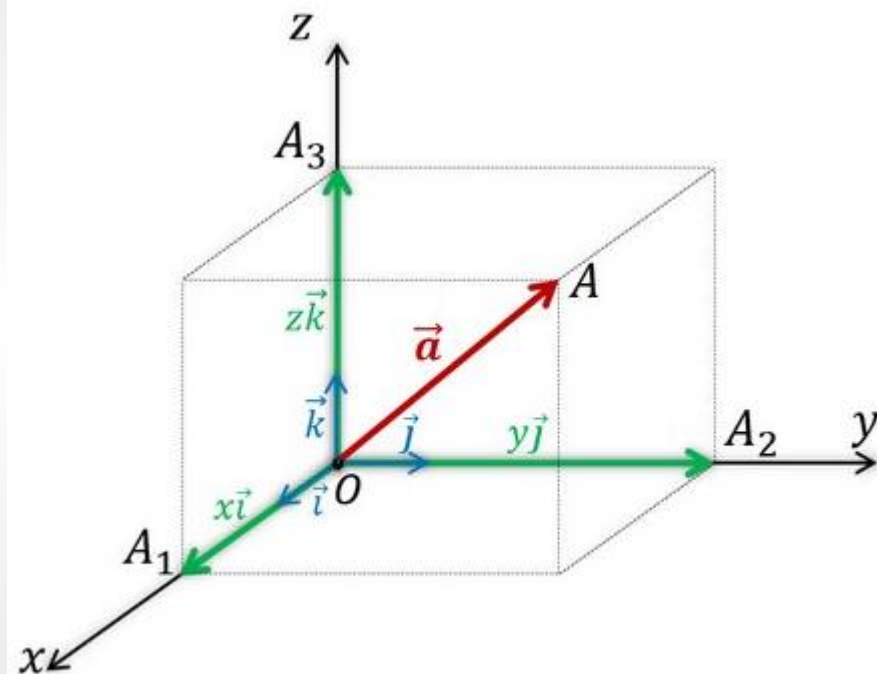
$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

.....

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$



- Теорема 1.** Если в пространстве L некоторая система n -мерных векторов обладает свойством, что **определитель**, строками которого являются данные векторы, **не равен нулю**, то эти **векторы** образуют **базис** в L .
- Теорема 2.** Разложение произвольного вектора **$\mathbf{a}$** по базису всегда единственно.
- Числа $k_1, k_2, \dots, k_n$ – коэффициенты разложения вектора **$\mathbf{a}$** по некоторому базису – называются **координатами** вектора **$\mathbf{a}$** в этом базисе.



Пример. Даны четыре вектора:

$$\bar{a}_1 = (-1; 2; 0), \quad \bar{a}_2 = (1; 2; 1), \quad \bar{a}_3 = (2; 1; -1), \quad \bar{b} = (3; 2; -7)$$

Показать, что три первых вектора образуют базис
в трехмерном пространстве

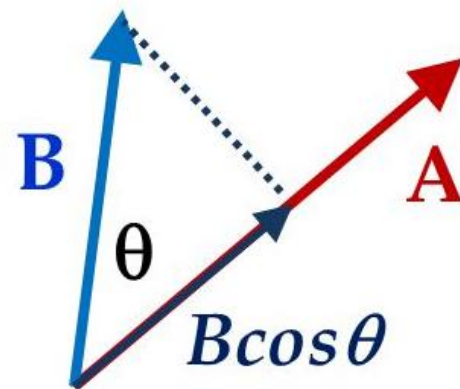
$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -1 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 = 9 \quad \Delta \neq 0, \text{ а значит это базис.}$$

Нелинейные операции с векторами

Под скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается число, которое обозначается $(\vec{a}, \vec{b})$ или просто $\vec{a} \cdot \vec{b}$, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$



В координатной форме для n-мерного пространства:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ и } \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Скалярное произведение векторов

- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ – коммутативность;
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$ – дистрибутивность;
- $(k\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, k – любое действительное число;
- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, если $\mathbf{x}$ – ненулевой вектор;
- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x}$ – нулевой вектор

Свойства скалярного произведения

- Линейное пространство L , в котором введена операция скалярного произведения, называется **евклидовым пространством**.
- **Длина (модуль)** вектора $\mathbf{x}$ через скалярное произведение:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})}$$

$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$ (неравенство Коши–Буняковского)

Так как $(a, b) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$ и модули векторов равны:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2},$$

то можно определить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \end{aligned}$$

Угол между векторами

Пример.

Определить скалярное произведение двух векторов и угол φ между ними:

$$\vec{a} = (1, 2, 3), \quad \vec{b} = (-3, 2, -1).$$

Решение:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (1(-3) + 2 \cdot 2 + 3(-1)) = -3 + 4 - 3 = -2,$$

$$\cos \varphi = \frac{1(-3) + 2 \cdot 2 + 3(-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = -\frac{2}{14} = -0.143$$

$$\varphi = \arccos(-0.143) \cong 98^\circ.$$

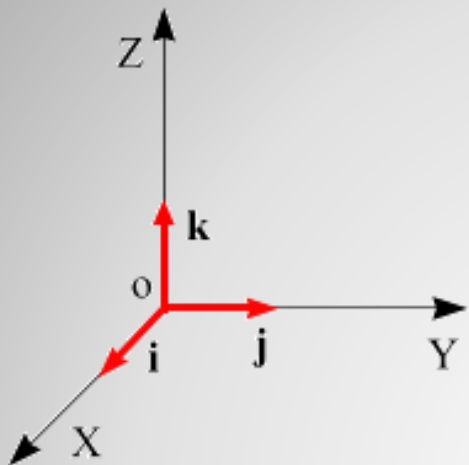
- Векторы x и y перпендикулярны (ортогональны) друг другу, если их скалярное произведение равно нулю:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = 0$$

$$(x, y) = 0$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Вектор **e** называют **нормированным** или **единичным**, если его модуль равен 1.
- Систему векторов $e_1, e_2, \dots, e_p$ называют **ортонормированной**, если любые два вектора этой системы ортогональны друг другу и если модуль каждого из них равен 1.
- В n -мерном евклидовом пространстве система n ортонормированных векторов образует **ортонормированный** базис.



i, j, k - орты.

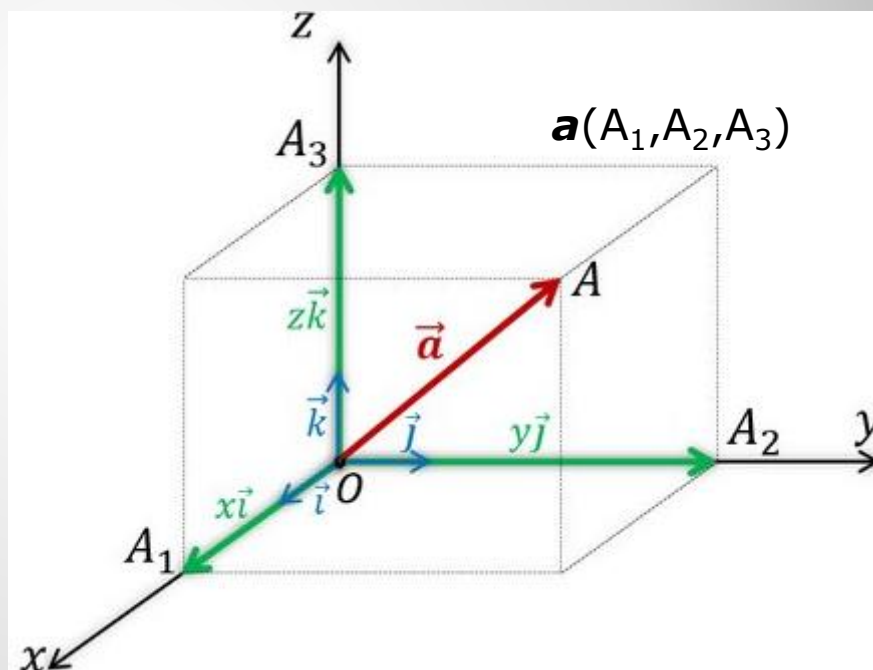
Вектор в системе координат XYZ:

$$\mathbf{a} = i x + j y + k z$$

$$\bar{i} = (1, 0, 0)$$

$$\bar{j} = (0, 1, 0)$$

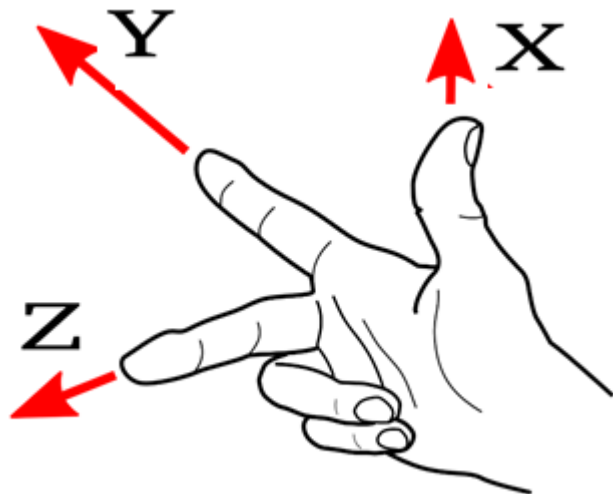
$$\bar{k} = (0, 0, 1)$$



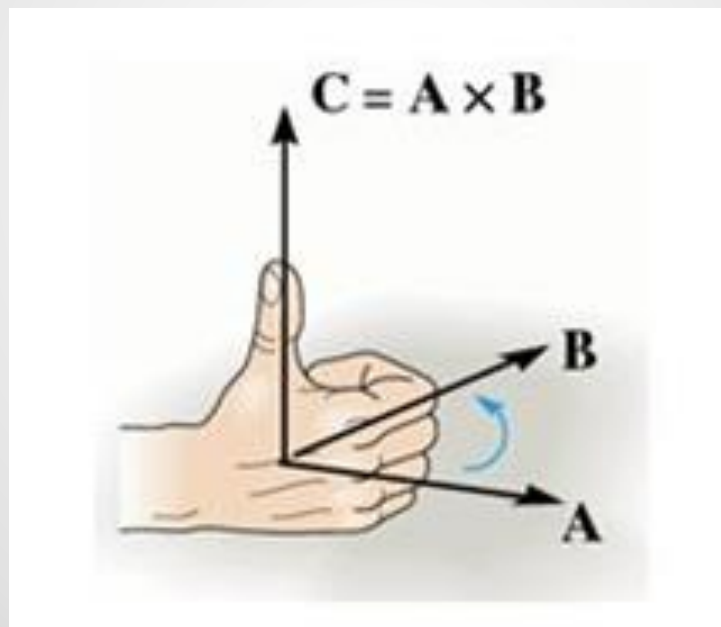
Ортонормированный базис в 3-х мерном пространстве



Тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некопланарных векторов называется *правой*, если прямоугольную систему координат в пространстве можно разместить так, что при общем начале этих векторов ось OX будет проходить через вектор $\vec{a}$, вектор $\vec{b}$ будет лежать в одной полуплоскости с положительным направлением оси OY , вектор $\vec{c}$ - в полупространстве, определяемом положительным направлением оси OZ . В противном случае тройка – левая.



Векторное произведение векторов



Под *векторным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор:



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b},$$

для которого:

- 1) модуль вектора $\vec{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на данных векторах:

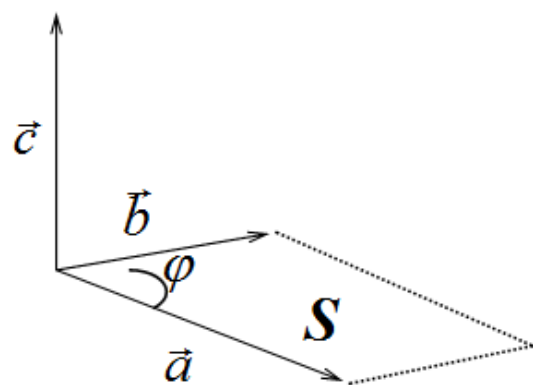
$$|\vec{c}| = S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi,$$

где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

- 2) Этот вектор перпендикулярен перемножаемым векторам:

$$\vec{c} \perp \vec{a} \quad \text{и} \quad \vec{c} \perp \vec{b},$$

- 3) Если векторы неколлинеарны, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.



1) При изменении порядка сомножителей векторное произведение меняет свой знак на обратный, сохраняя модуль:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

2) Векторный квадрат равен нулевому вектору $\vec{0}$:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

3) Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения, т.е. если λ - число, то:

$$(\lambda \vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

4) Для любых трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедливо равенство:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

Свойства векторного произведения

Векторное произведение *двух векторов* в координатной форме определяется по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

где (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно.

В координатной форме



- Найти площадь треугольника ABC с вершинами $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$, $C(0,1,1)$.
- Решение.

Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}$ площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Так как $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$ и $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$, отсюда

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = i - \vec{j} + \vec{k}.$$

$$\text{Значит, } S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = (1/2) \sqrt{3}.$$

Пример



Тип произведения	Скалярное	Векторное
тип объекта	число	вектор
обозначение	$\vec{a} \cdot \vec{b}, (\vec{a}, \vec{b})$	$\vec{a} \times \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$
Модуль (абсолютное значение)	$ \vec{a} \vec{b} \cos \varphi$	$ \vec{a} \vec{b} \sin \varphi$
Представление в координатной форме	$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$	$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$
Использование для определения взаимного расположения векторов	При $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ векторы $\vec{a}, \vec{b}$ ортогональны (перпендикулярны)	При $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ векторы $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеарны (параллельны)
	Определение угла между векторами, заданными в координатной форме: $\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{ \vec{a} \vec{b} }$	Возможность определить какой-либо вектор, ортогональный двум данным, как их векторное произведение
Геометрический смысл (площади и объемы)	-	модуль векторного произведения двух векторов равен площади S параллелограмма, построенного на данных векторах

Итак, нами рассмотрены:

1. Понятие вектора, линейные операции над векторами.
2. Введено определение линейной зависимости и независимости векторов, размерности линейного пространства, базиса линейного пространства.
3. Нелинейные операции с векторами.

Заключение.

Обязательная:

- Кричевец, А.Н. Математика для психологов /А.Н. Кричевец, Е.В. Шикин, А.Г. Дьячков. – М.: Флинта: НОУ ВПО «МПСИ», 2010.– 376 с.
- Ганичева А.В., Козлов В.П. Математика для психологов. М.: Аспект-пресс, 2005, с.81-89.

Дополнительная:

- Математика в примерах и задачах: учебное пособие /Л.Н.Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В.Никонова и др. – М.: ИНФРА-М, 2011. –373 с.
- Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики. М., ГЭОТАР-Медиа, 2007.

Электронные ресурсы:

- УБИЦ КрасГМУ Портал центра дистанционного образования
Электронная библиотека

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА



**БЛАГОДАРЮ
ЗА ВНИМАНИЕ**