Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Красноярский государственный медицинский университет имени профессора В.Ф. Войно-Ясенецкого» Министерства здравоохранения Российской Федерации

Фармацевтический колледж

Математика

В 2 часть

Часть I

СБОРНИК

МЕТОДИЧЕСКИХ УКАЗАНИЙ

ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ВНЕАУДИТОРНОЙ (САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ) РАБОТЕ

на базе основного общего образования

(1 курс, очная форма обучения)

Красноярск
2015

УДК 51(07)
ББК 22.1
М 34

Математика. В 2 ч. : сб. метод. указаний для обучающихся к внеаудитор. (самостоят.) работе на базе основного общего образования (1 курс, очная форма обучения) / сост. Е. П. Клобертанц, И. П. Клобертанц, Л. Ю. Позднякова ; Фармацевтический колледж. – Красноярск : тип. КрасГМУ, 2015. – Ч. I. – 92 с.

Составители: Клобертанц Е.П.,
Клобертанц И.П.,
Позднякова Л.Ю.

Сборник методических указаний предназначен для внеаудиторной работы обучающихся. Составлен в соответствии с ФГОС среднего общего образования (базовый уровень) (2012 г.), рабочей программой дисциплины (2014г.) и СТО СМК 4.2.01-11. Выпуск 3.

Рекомендован к изданию по решению методического совета (Протокол № 8 от «20» апреля 2015).

КрасГМУ
2015 г.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 4
Целые, рациональные, действительные числа. Комплексные числа 6
Приближенные вычисления и вычислительные средства. Погрешности. 12
Проценты 17
Аксиоматика 22
Параллельность в пространстве 26
Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве 31
Углы между прямыми и плоскостями в пространстве 39
Геометрические преобразования в пространстве 43
Призма. Параллелепипед. Куб 46
Пирамида. Тетраэдр. 50
Симметрия в многогранниках 55
Сечение многогранников 58
Цилиндр 60
Конус 64
Шар 68
Объемы геометрических тел 72
Площади поверхностей 76
Координаты в пространстве 81
Векторы в пространстве 85
Задания для самоподготовки к итоговым занятиям по дисциплине «Математика» 89
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Исследовательская работа «Роль математики в жизни человека» 91
ЛИТЕРАТУРА 92

ВВЕДЕНИЕ

Сборник методических указаний для внеаудиторной (самостоятельной) работы обучающихся 1 курса (на базе основного общего образования) по дисциплине «Математика» предназначен для самоподготовки студентов к практическим занятиям.

Для подготовки к практическому занятию необходимо изучить основной теоретический материал. Краткое содержание теоретического материала представлено по каждой теме. Для более глубокого изучения темы воспользуйтесь рекомендуемым списком литературы. После изучения темы проверьте себя, ответив на вопросы для самоподготовки. С целью самоконтроля ответьте на предложенные тестовые задания в конце каждой темы.

Для углубленного изучения темы, формирования умений, в пособии предлагается выполнение обязательной внеаудиторной самостоятельной работы. Самостоятельная работа состоит из индивидуальных заданий, которые необходимо выполнить по завершению изученной темы в соответствии со своим вариантом.

По дисциплине «Математика» предусмотрено выполнение исследовательской работы «Роль математики в жизни человека» (Приложение 1).

Для подготовки к итоговому занятию необходимо воспользоваться разделом пособия «Задания для самоподготовки к итоговым занятиям по дисциплине «Математика»».

Сборник составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика» по разделу «Геометрия». При изучении геометрии в данном курсе снижается внимание к идее аксиоматического построения курса стереометрии (раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве). Основной акцент делается на формирование умений применять изученные факты в простейших случаях.

ЗАЧЕМ ТЕБЕ ИЗУЧАТЬ МАТЕМАТИКУ?

Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит.

М. Ломоносов

Математика - это фундаментальная наука, методы которой, активно применяются во многих естественных дисциплинах, таких как физика, химия и даже биология.

Медицина и здравоохранение - тоже существует благодаря математике, которая используется, во-первых при проектировании медицинских приборов, а во-вторых, при анализе данных об эффективности того или иного лечения.

Математическое образование является средством активного интеллектуального развития человека, его мыслительных способностей (умение обобщать, анализировать, логически мыслить и рассуждать, находить закономерности).

Человек, знающий математику, и в своей профессиональной деятельности стремится строго следовать тому предписанию и набору правил, которые приводят к получению правильного результата. Поэтому одной из задач математики является высокоинтеллектуальное развитие человека, способного творчески решать поставленные задачи и адаптироваться к динамически развивающемуся обществу.

Кто с детских лет занимается математикой, тот развивает внимание, тренирует свой мозг, свою волю, воспитывает настойчивость и упорство в достижении цели.

А. Маркушевич

Целые, рациональные, действительные числа. Комплексные числа

Значение темы:
Число является одним из основных понятий математики. Начиная изучать математику, мы сразу сталкиваемся с числом, начинаем ими оперировать. Какие же числа бывают? Что такое комплексные числа? Умение совершать действия над любыми числами пригодится в любой сфере деятельности.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

Знать:
- Целые и рациональные числа. Действительные числа. Комплексные числа.
- Определение комплексного числа. Действия с комплексными числами

Уметь:
- выполнять арифметические действия над числами, сочетая устные и письменные приемы,
- сравнивать числовые выражения.
- выполнять действия над комплексными числами.

Краткое содержание темы:

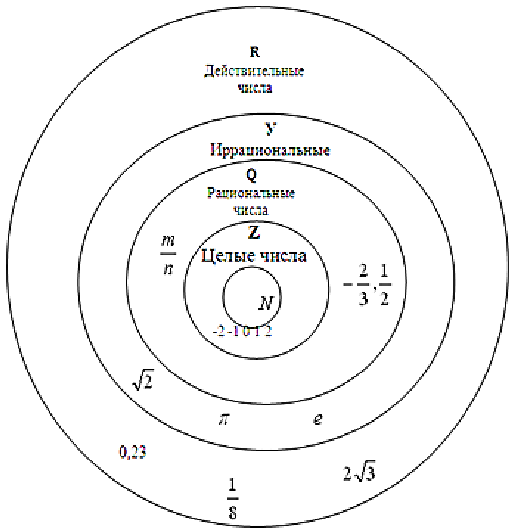
Целое число – это натуральные числа.

Пример:

1,2,3,4,…- натуральные положительные числа

-1,-2,-3,-4,… - противоположные натуральные называются отрицательными.

Целые числа и дроби (положительные и отрицательные) составляют вместе множество рациональных чисел.



Любое натуральное число может представлено:

$\frac{m}{n}$, где m – целое число , а n – натуральное число.

Пример:

$$-2=\frac{-4}{2}=\frac{-6}{3}=\frac{-100}{50}$$

$$0{,}3=\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=\frac{300}{100}$$

Опр: объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел называется множеством *действительных* (или *вещественных*) чисел.

Арифметические действия:

1) $a+b=b+a$
2) $(a+b)+c=(c+b)+a$
3) $a*b=b*a$
4) $(a*b)*c=(c*b)*a$
5) $(a+b)*c=cb+ac$
6) $a+0=a$
7) $a+(-a)=0$
8) $a*1=a$
9) $a*\frac{1}{a}=1, a\neq 0$

Разложение на множители

Разложением многочлена на множители называется представление многочлена в виде произведения многочленов.

При разложении многочлена на множители используются следующие способы:

1. Вынесение общего множителя за скобки:

$$3a^2b^3-12ab^2=3ab^2(ab-4)$$

2. Способ группировки:

$$9bc-2a+3b-6ac=(9bc+3b)+(-2a-6ac)=$$
$$3b(3c+1)-2a(1+3c)=(1+3c)(3b-2a)$$

3. Применение формул сокращенного умножения

$$16x^2-9y^2=(4x-3y)(4x+3y)$$

Формулами сокращенного умножения называются следующие:

1. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ - разность квадратов
2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ - квадрат суммы
3. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ - квадрат разности
4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ - куб суммы
5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ - куб разности
6. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ - сумма кубов
7. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ - разность кубов

Комплексные числа

С эпохи Возрождения математики стали использовать числа вида $z=x+iy$ для решения квадратных уравнений, дискриминант у которых отрицателен.

Опр: Комплексным числом называется всякая упорядоченная пара (a, b).

Комплексные числа имеют вид: a+bi, где a,b – действительные числа
i – некоторый символ, который $i^2=-1$.

Способ записи комплексного числа в виде **a+bi** принято называть ***алгебраической формой***. Числа a – называют действительной частью, bi – мнимой частью(a,b) =a+bi

Пример:

- (2; -4)=2-4i
- (3;2) = 3+ 2i

Опр: Действительные числа (a,b); (c, d) называют равными тогда и только тогда, когда a=c; b=d

Опр: Комплексные числа вида a+0i отождествляются с действительными числами a

Опр: Комплексные числа вида 0+bi обозначают bi и называют чисто мнимыми числами

Опр: Сопряженным с комплексным числом z=a+bi называют число z=a-bi

Опр: Комплексное число -z=-a-bi называется противоположным числу z=a+bi

Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом:

Корни любого квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$

$D=b^2-4ac$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, если D<0, то $\sqrt{D}=i\sqrt{|D|}$

Пример:

$x^3=-8$

Решение:

Разложить левую часть уравнения $x^3+8=0$ на множители, получим $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

x+2=0

$x_1=-2$

или$x^2-2x+4=0$

D=-12, D<0

$x_2=1+i\sqrt{3}$

$x_3=1-i\sqrt{3}$

Ответ: $x_1=-2$, $x_2=1+i\sqrt{3}$, $x_3=1-i\sqrt{3}$

Операции над комплексными числами

1. Суммой комплексных чисел z=(a; b) и w=(c; d) называют комплексное число (a+c; b+d)

Пример: (2, 7)+(3, -4)=(2+3; 7-4)= (5, 3)

2. Комплексным нулем считают пару (0;0)
3. Числом, противоположным числу z=(a; b), считают число (-a; -b). Обозначают –z
4. Разностью комплексных чисел z=(a; b) и w=(c; d) называют комплексное число (a-c; b-d)

Пример:

(9, 10)-(8, 12)= (9-8; 10-12)=(1;-2)

5. Произведением комплексных чисел z=(a; b) и w=(c; d) называют комплексное число (ac-bd; ad+bc)

Пример:

z=(2;5) и w=(3;1)

z*w=(2*3-5*1; 2*1+ 5*3)=(1; 17)

6. Деление комплексных чисел:

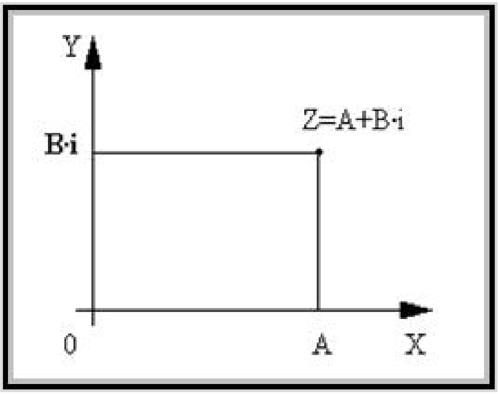
$$\frac{(a;b)}{(c;d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2};\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

Пример:

$$\frac{(2;3)}{(1;4)}=\left(\frac{2*1+3*4}{1^2+4^2};\frac{3*1-2*4}{1^2+4^2}\right)=\left(\frac{14}{17};\frac{-5}{17}\right)$$

Арифметические операции над комплексными числами обладают свойствами, что и арифметические операции над действительными.

Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат. Каждому $z = x + iy$ комплексному числу сопоставим точку плоскости с координатами {x,y} (а также радиус-вектор, соединяющий начало координат с этой точкой). Такая плоскость называется комплексной. Вещественные числа на ней занимают горизонтальную ось, мнимая единица изображается единицей на вертикальной оси; по этой причине горизонтальная и вертикальная оси называются соответственно вещественной и мнимой осями.



Вопросы для самоподготовки:

1. Что такое число?
2. Какие числа бывают? Приведите классификацию.
3. Зачем человеку нужно было придумывать различные множества чисел?
4. Дайте определение комплексного числа.
5. Приведите пример комплексного числа, выделив действительную и мнимую часть.
6. Как выполнить сложение, вычитание, умножение и разность на множестве комплексных чисел.
7. Приведите примеры комплексных чисел и действий над ними, результат которых есть комплексное число.
8. Как изображается комплексное число на плоскости?

Тест для самоконтроля:

1. Вид несократимой дроби m/n, где m и n - целые числа, следующее число -0,5
   1) $\frac{5}{10}$
   2) $-\frac{1}{2}$
   3) $-1\frac{1}{2}$
2. Сократить дробь $\frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$
   1) $\frac{x-5}{x+2}$
   2) $\frac{x+5}{x-2}$
   3) 1
3. Комплексное число z из уравнения (1+i)z=-2+3i равно
   1) z=0,5+2,5i
   2) z=2,5+0,5i
   3) z=0,5-2,5i
4. Сумма двух комплексных чисел: $z=z_1+z_2$, если $z_1=(4-3i)$ и $z_2=(-2+i)$
   1) z=6+i
   2) z=2+2i
   3) z=2-2i
5. $z=z_2-z_1$, если $z_1=(5+3i)$ и $z_2=(7-6i)$.
   1) z=-2-3i
   2) z=2-9i
   3) z=-(2+3i)
6. $z=z_1*z_2$, если $z_1=(2+3i)$ и $z_2=(6-5i)$.
   1) z=12-15i
   2) z=-12+15i
   3) z=27+8i
7. Действительные числа x и y из уравнений (1+i)x+(1-i)y=3-i равны
   1) x=1, y=2
   2) x=0, y=2
   3) x=-1, y=-2
8. Вычислить $i+i^2+i^3+i^4+i^5$
   1) 1+i
   2) 1-i
   3) i

9. Решить уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$
   1) ± 3
   2) $1 \pm 2i$
   3) решений нет
10. Комплексное число соответствует точке плоскости (2;3).
   1) 2+3i
   2) 2-3i
   3) 5

Ключ для самопроверки теста:

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
вариант ответа	2	1	1	3	2	3	1	3	2	1

Самостоятельная работа:

1. Выполнить действия над числами z_1= (1 - 2i), z_2=1 + 2i
2. Решить уравнение x^2+16=0

Приближенные вычисления и вычислительные средства. Погрешности.

Значение темы:

Успешное внедрение и совершенствование техники невозможно без знания существующих конструкций, специфики эксплуатации и расчетов современного оборудования. Результаты измерений с помощью, каких-либо приборов почти никогда не дают точного значения величин, поскольку они содержат те или иные погрешности. Полностью учесть и исключить погрешности невозможно, однако их можно оценить. Числовые значения величин, с которыми приходится иметь дело при обработке результатов измерении, являются большей частью приближенными.

В связи с этим необходимо будущему специалисту владеть методами, применяемыми при обработке результатов, полученных при измерениях. Это позволит научиться получать из совокупности измерений наиболее близкие к истине результаты, вовремя заметить несоответствия и ошибки, разумно организовать сами измерения и правильно оценить точность полученных значений.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

Знать:

- Приближенные вычисления. Приближенное значение величины и погрешности приближений.

Уметь:

- Находить приближенные значения величин и погрешности вычислений.

Краткое содержание темы:

Точные и приближенные значения величин

Одни вычисления бывают *точными,* вторые - *приближенными.*

Опр: Приближённые вычисления - вычисления, в которых данные и результат (или по крайней мере только результат) являются числами, лишь приближённо представляющими истинные значения соответствующих величин.

Чаще всего удобно пользоваться приближенным числом вместо точного, тем более, что во многих случаях точное число вообще найти невозможно.

Так, если говорят, что в классе есть 29 учеников, то число 29 — точное. Если же говорят, что расстояние от Москвы до Киева равно 960 *км,* то здесь число 960 — приближенное, так как, с одной стороны, наши измерительные инструменты не абсолютно точны, с другой стороны, сами города имеют некоторую протяженность.

Результат действий с приближенными числами есть тоже приближенное число. Выполняя некоторые действия над точными числами (деление, извлечение корня), можно также получить приближенные числа.

Теория приближенных вычислений позволяет:

1) зная степень точности данных, оценить степень точности результатов;
2) брать данные с надлежащей степенью точности, достаточной для обеспечения требуемой точности результата;
3) рационализировать процесс вычисления, освободив его от тех выкладок, которые не окажут влияния на точность результата.

Округление

Одним из источников получения приближенных чисел является *округление.* Округляют как приближенные, так и точные числа.

Опр: *Округление числа* — математическая операция, позволяющая уменьшить количество знаков в числе за счет замены числа его приближённым значением с определённой точностью.

Для обеспечения наибольшей близости округленного числа к округляемому следует пользоваться такими правилами: чтобы округлить число до единицы определенного разряда, надо отбросить все цифры, стоящие после цифры этого разряда, а в целом числе заменить их нулями. При этом учитывают следующее:

1) если первая (слева) из отбрасываемых цифр менее 5, то последнюю оставленную цифру не изменяют (округление с *недостатком);*
2) если первая отбрасываемая цифра больше 5 или равна 5, то последнюю оставленную цифру увеличивают на единицу (округление с *избытком).*

Пример: округлить

а) до десятых 12,34;
б) до сотых 3,2465; 1038,785;
в) до тысячных 3,4335.
г) до тысяч 12 375: 320 729.

Ответы:

а) 12.34 ≈12,3;
б) 3,2465 ≈3,25;   1038,785 ≈1038,79;
в) 3,4335 ≈3,434.
г) 12375 ≈12000;   320 729 ≈ 321 000.

Абсолютная и относительная погрешности

Опр: Разность между точным числом и его приближенным значением называется *абсолютной погрешностью* приближенного числа.

Например, если точное число 1,214 округлить до десятых, получим приближенное число 1,2. В данном случае абсолютная погрешность приближенного числа 1,2 равна 1,214—1,2, т. е. 0,014.

Абсолютной погрешностью приближенного значения называется модуль разности точного и приближенного значения.

$\Delta a = \left| a - \overline{a} \right|$, где $\overline{a}$ - приближенное значение числа а.

Пример:
а =2,25 , $\bar{a}$ =2,3.
Δ а =|2,25- 2,3|= 0,05 –абсолютная погрешность.
Относительной погрешностью приближенного значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения.

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a} = \frac{|a - \bar{a}|}{a} \ (\%)$$

*Пример:*а =14,7, т.е. $\bar{a} \approx 15$

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a} = \frac{|a - \bar{a}|}{a} = \frac{|14{,}7 - 15|}{14{,}7} = 0{,}02 \quad \text{или } 2\%$$

Действия над приближенными числами

Результат действий над приближёнными числами представляет собой также приближённое число. Погрешность результата может быть выражена через погрешности первоначальных данных при помощи следующих теорем:

1) Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.
2) Относительная погрешность суммы заключена между наибольшей и наименьшей из относительных погрешностей слагаемых.
3) Относительная погрешность произведения или частного равна сумме относительных погрешностей сомножителей или, соответственно, делимого и делителя.
4) Относительная погрешность n-ой степени приближенного числа в n раз больше относительной погрешности основания (как у целых, так и для дробных n).

Арифметические действия над приближенными числами

При соблюдении этих правил можно считать, что в среднем полученные результаты будут иметь все знаки верными, хотя в отдельных случаях возможна ошибка в несколько единиц последнего знака.

1) При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближённом данном с наименьшим числом десятичных знаков.
2) При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом значащих цифр.
3) При возведении в квадрат или куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближённое число (последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания).
4) При увеличении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое значение подкоренного числа (последняя цифра квадратного и особенно

кубического корня при этом более надёжна, чем последняя цифра подкоренного числа).

5) Во всех промежуточных результатах следует сохранять одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта запасная цифра отбрасывается.

6) Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя, лишь одну лишнюю цифру.

Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с К цифрами данные следует брать с таким числом цифр, какое даёт согласно правилам 1-4(К+1) цифру в результате.

Вопросы для самоподготовки:

1. Можно ли сравнить качество приближений по их абсолютным погрешностям?
2. Приведите примеры приближенных чисел, в которых количество десятичных знаков больше числа значащих цифр?

Тест для самоконтроля:

1. Из приведенных в примерах чисел распределите к точным и приближенным
   1) в колледже обучается 1500 студентов.
   2) в городе Красноярск живет 1 млн. жителей.
   3) книжный фонд библиотеки колледжа 30 тыс. книг.
   4) в книге 456 странице.
   5) ширина улицы 13 м.
   6) площадь участка 125,35 м^2.
   7) среднее расстояние от Земли до Солнца 95 142357 английских миль
2. Точное из равенств: $\sqrt{46} = 6{,}78$ или $\frac{7}{13} = 0{,}54$
   1) $\sqrt{46} = 6{,}78$
   2) $\frac{7}{13} = 0{,}54$
3. Округлить число 1,5783 с точностью до 10^{-3}
   1) 1
   2) 1,578
   3) 1,6
4. Округлить число 159734 с точностью до 10^3
   1) $159 \cdot 10^3$
   2) $160 \cdot 10^3$
   3) $1597 \cdot 10^3$

5. По данным измерений найдите приближенное измерение, если четырех кратное измерение одной и той же длины дало результаты 19,38; 19,42; 19,37; 19,45 см.
   1) 19,4
   2) 19,5
   3) 19,41
6. В колледже1489 студентов. Абсолютная и относительная погрешность равна…
   1) абсолютная погрешность - 11. Относительная погрешность - 0,7%
   2) абсолютная погрешность - 10. Относительная погрешность - 0,8%
   3) абсолютная погрешность - 12. Относительная погрешность - 0,9%

Ключ для самопроверки теста:

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
вариант ответа	Точные значения: 1, 3, 4 Приближенные значения: 2, 5, 6, 7	1	2	2	3	2

Самостоятельная работа:

1.Изучите работу с компьютерной программой «Калькулятор».

Для запуска калькулятора нужно нажать кнопку **Пуск**, выбрать команды **Программы** и **Стандартные**, а затем выбрать **Калькулятор**.

При работе с программой Калькулятор используйте команды по работе с памятью:

MC – Удаляет число, хранимое в памяти.

MR – Отображает число, хранящееся в памяти. Содержимое памяти не меняется.

MS – Заносит отображаемое число в память.

M + – Добавляет отображаемое число к числу, уже хранящемуся в памяти.

2.Выполните действия с приближенными данными:

1. $2,5*10^4+2,3*10^6$
2. $3,58^3$
3. $2,35^{-4}$
4. $\sqrt{1,35}$
5. $\sqrt[3]{0,0027}$

Вычислите с точностью до 0,001:$\sin 27^0$, $\cos 35^0 54'$, $\sin\frac{\pi}{6}$

Проценты

Значение темы:

Проценты - одно из математических понятий, которые часто встречаются в повседневной жизни. В настоящее время понимание процентов и умение производить процентные расчеты, необходимы каждому человеку: прикладное значение этой темы очень велико и затрагивает финансовую, демографическую, экологическую, экономическую, социологическую и другие стороны нашей жизни. Работники медицинских специальностей часто в своей деятельности стакиваются с процентами, например при разведении растворов необходимой концентрации.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен:

Знать:

- Проценты. Отношения и пропорция. Пропорциональность. Практическое применение пропорций.

Уметь:

– Составлять и решать пропорции и задачи на проценты

Краткое содержание темы.

Процент – это сотая часть единицы. Запись 1% означает 0.01. Существует три основных типа задач на проценты:

Правило 1.Чтобы найти данное число процентов от числа, нужно проценты записать десятичной дробью, а затем число умножить на эту десятичную дробь

Правило 2.Чтобы найти, сколько процентов одно число составляет от другого, нужно разделить первое число на второе и полученную дробь записать в виде процентов.

Правило 3.Чтобы найти процентное отношение двух чисел А и В, надо отношение этих чисел умножить на 100%, то есть вычислить (а/в)*100%.

Правило 4.Чтобы найти число по данным его процентам, надо выразить проценты в виде дроби, а затем значение процентов разделить на эту дробь.

Процентное содержание вещества в растворе (например, 15%), иногда называют %-м раствором, например, 15%-й раствор соли.

Если концентрация вещества в соединении по массе составляет р%, то это означает, что масса этого вещества составляет р% от массы всего соединения.

Если известно процентное содержание вещества, то его концентрация находится по формуле: К=р/100% к - концентрация вещества; р - процентное содержание вещества (в процентах).

Чтобы увеличить положительное число а на р процентов, следует умножить число а на коэффициент увеличения к=(1+0,01р).

Чтобы уменьшить положительное число а на р процентов, следует умножить число а на коэффициент уменьшения к= (1-0,01р).

Правило 5. Чтобы найти, на сколько % положительное число у отличается от положительного числа а, следует вычислить, сколько % у составляет от а, а затем от полученного числа отнять а.

Примеры:

1. Найдите 30 % от 60.

Решение: $60 \cdot 0{,}3 = 18$.

2. Найдите число, если 3 % числа его составляют 150.

Решение: $x = 150 : 0{,}03$; $x = 5000$.

3. Сколько процентов составляет 150 от 600?

Решение: $\frac{150}{600} \cdot 100\,\% = 25\,\%$.

4. Увеличить число 60 на 20 %.

Решение: $60 + 60 \cdot 0{,}2 = 72$ или $60(1 + 0{,}2) = 72$.

5. Число 72 уменьшили на 20 %.

Решение: $72 - 72 \cdot 0{,}2 = 57{,}6$ или $72(1 - 0{,}2) = 57{,}6$.

Процентное содержание. Процентный раствор.

6. Сколько кг соли в 10 кг соленой воды, если процентное содержание соли 15%.

Решение: 10 . 0,15 = 1,5 (кг) соли. Процентное содержание вещества в растворе (например, 15%), иногда называют %-м раствором, например, 15%-й раствор соли.

7. Сплав содержит 10 кг олова и 15 кг цинка. Каково процентное содержание олова и цинка в сплаве?

Решение:

Процентное содержание вещества в сплаве - это часть, которую составляет вес данного вещества от веса всего сплава.

1) 10 + 15 = 25 (кг) - сплав;

2) 10/25 . 100% = 40% - процентное содержание олова в сплаве;

3) 15/25 . 100% = 60% - процентное содержание цинка в сплаве;

Концентрация

Если концентрация вещества в соединении по массе составляет р%, то это означает, что масса этого вещества составляет р% от массы всего соединения.

8. Концентрация серебра в сплаве 300 г составляет 87%.

Решение: 300 . 0,87 = 261 (г). В этом примере концентрация вещества выражена в процентах.

Отношения объема чистой компоненты в растворе ко всему объему смеси называется объемной концентрацией этой компоненты. Сумма концентраций всех компонент, составляющих смесь, равна 1. В этом случае концентрация - безразмерная величина. Если известно процентное содержание вещества, то его концентрация находится по формуле:

к = р /100%,

к - концентрация вещества;

р - процентное содержание вещества (в процентах).

9. Слиток сплава серебра с цинком весом в 3.5 кг содержал 76% серебра. Его сплавили с другим слитком и получили слиток весом в 10.5 кг, содержание серебра в котором было 84%. Сколько процентов серебра содержалось во втором слитке?

Решение:

1) 3.5-0.76 = 2.66 (кг) серебра в первом слитке.
2) 10.5-0.84 = 8.82 (кг) серебра в 10.5 кг сплава.
3) 8.82 - 2.66 = 6.16 (кг) серебра во втором слитке.
4) 10.5 - 3.5 = 7 (кг) вес второго слитка.
5) 6.16: 7 = 0.88 = 88% серебра содержалось во втором слитке.

Вопросы для самоподготовки:

1. Как найти данное число процентов от числа.
2. Как найти, сколько процентов одно число составляет от другого
3. Как найти процентное отношение двух чисел А и В
4. Как найти число по данным его процентам
5. Как найти концентрацию раствора
6. Что следует делать, чтобы увеличить положительное число а на р процентов.

Тест для самоконтроля:

1. Из 100 куколок при благоприятных условиях на свет появляются 70 % бабочек. Сколько бабочек появится из 2100 куколок?
   1) 1470 бабочек
   2) 3 бабочек
   3) 14700 бабочек
2. Содержание эфирного масла в лепестках розы составляет в среднем 4 %. Сколько эфирного масла можно получить из лепестков розы?
   1) 3 г
   2) 4 г
   3) 0,1 г
3. Средний рост девочек того же возраста, что и Наташа, равен 150 см. Рост Наташи на 8 % выше среднего. Какой рост у Наташи?
   1) 150 см
   2) 158 см
   3) 162 см

4. В цветочном магазине цена непроданной розы каждый день снижается на 15 %. Сколько будет стоить роза на третий день, если в первый день ее продали по 80 рублей?
   1) 68 рублей
   2) 57 рублей 8 копеек
   3) 80 рублей
5. Найти число, если 15% его равны 30.
   1) 200
   2) 150
   3) 100
6. Сколько кг соли в 10 кг соленой воды, если процентное содержание соли 15%.
   1) 1,5
   2) 1,2
   3) 150
7. Сплав содержит 10 кг олова и 15 кг цинка. Каково процентное содержание олова и цинка в сплаве?
   1) 40% - содержание олова в сплаве, 60% - содержание цинка в сплаве.
   2) 25% - содержание олова в сплаве, 60% - содержание цинка в сплаве.
   3) 40% - содержание олова в сплаве, 25% - содержание цинка в сплаве.
8. К 120 г раствора, содержащего 80% соли, добавили 480 г раствора, содержащего 20 % той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?
   1) 96%
   2) 32%
   3) 52%
9. Концентрация серебра в сплаве 300 г составляет 87%. Сколько чистого серебра в сплаве?
   1) 344
   2) 26100
   3) 261
10. Фермер продает молоко через магазин и хочет получать за него 25 рублей за литр. Магазин удерживает 20% стоимости проданного товара. По какой цене будет продаваться молоко в магазине?
    1) 30 рублей
    2) 33 рубля
    3) 31 рубль 25 копеек

Ключ для самопроверки теста:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
вариант ответа	1	2	3	2	1	1	1	2	3	3

Самостоятельная работа:

1. Найти 14% от 84.
2. Найти число, если 12% его составляют 9,03.
3. Цена товара 64 руб. После снижения цен товар стал стоить 57 руб. На сколько процентов снижена цена?
4. При продаже товара за 1548 руб. получено 20% прибыли. Определить себестоимость товара.
5. Свежие фрукты содержали 72%, а сухие - 20%. Сколько сухих фруктов получится из 20 кг свежих?
6. Кусок сплава меди и олова весом 12 кг содержит 45% меди. Сколько олова надо добавить к этому куску, чтобы в новом сплаве было 40% меди?
7. имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля в 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т стали с содержанием никеля в 30%?
8. Сколько чистого спирта надо добавить к 735 г 16%-ного раствора йода в спирте, чтобы получить 10%-ный раствор?
9. Сбербанк начисляет по вкладам ежегодно 110%. Вкладчик внес в сбербанк 150 тыс. руб. Какой будет сумма вклада через 2 года?
10. Площадь прямоугольника равна 100 $см^2$. Одна сторона прямоугольника уменьшилась на 16,4%, вторая увеличилась на 25%. Найти площадь нового прямоугольника.

Аксиоматика

Значение темы:

Математика всегда была неотъемлемой и существеннейшей составной частью человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности.

При знакомстве с аксиомами стереометрии развивается пространственное воображение, формируется логическое мышление.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

– аксиомы стереометрии и следствия из аксиом;

уметь:

- использовать изученные свойства плоских геометрических фигур при исследовании геометрических объектов пространства, лежащих в одной плоскости;
- находить на рисунке заданные точки, прямые и плоскости;
- иллюстрировать на моделях и изображать на рисунке названые фигуры в заданном взаимном расположении;
- задавать плоскость с помощью трех точек, точки и прямой, пересекающих или параллельных прямых и изображать её на рисунке.

Краткое содержание темы

Понятие стереометрии

Геометрия – это наука о свойствах геометрических фигур.

Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве.

Основными фигурами в пространстве являются ***точка, прямая и плоскость.***

Аксиомы стереометрии:

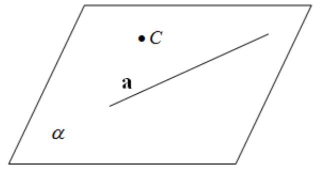
C_1**:** Какова бы не была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

C_2**:** Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

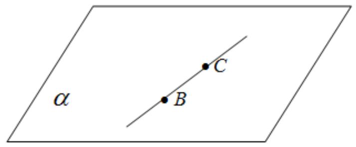
C_3**:** Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Следствия из аксиом:

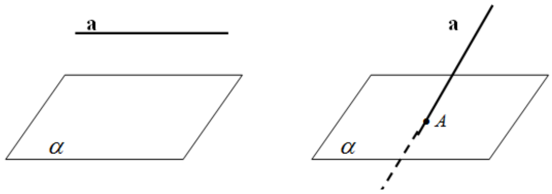
Теорема: (о существовании плоскости, проходящей через данные точку и прямую): *Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.*



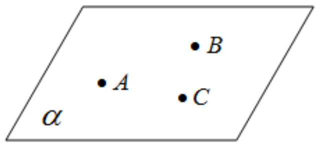
Теорема: (о пересечении прямой с плоскостью):*Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.*



Из теоремы следует, что *плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.*



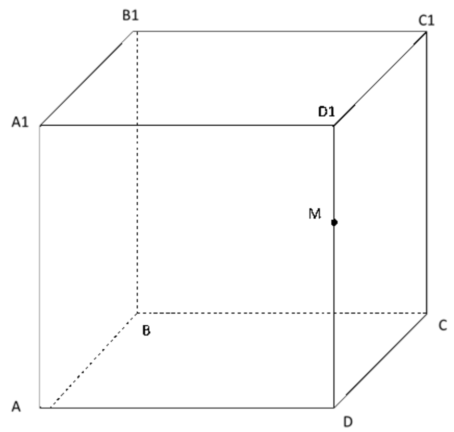
Теорема: (о существовании плоскости, проходящей через три данные точки): *Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.*



Теорема: (*о разбиении пространства плоскостью на два полупространства)*: Плоскость, разбивает пространства на два полупространства. Если точки X и Y принадлежат одному полупространству, то отрезок XY не пересекает плоскость. Если же точки X и Y принадлежат разным полупространствам, то отрезок XY пересекает плоскость.

Пример:
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$– куб
Найти: Количество плоскостей, проходящие через:

а) точки A, B,C;
б) прямые DCиBC



Решение:

а) через точки A, B,C можно провести плоскость ABCD (*по теореме о существовании плоскости, проходящей через три данные точки*).
б) прямые DC и BC лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку пересечения C, следовательно можно провести плоскость ADCD и причем только одну (*по C_3*).

Вопросы для самоподготовки:

1. Дайте определение стереометрии.
2. Сформулируйте аксиомы группы С.
3. Сформулируйте следствия из аксиом.
4. Перечислите способы задания плоскости.

Тест для самоконтроля:

1. Количество прямых, проходящих через одну точку пространства
   1) ни одной
   2) одну
   3) две
   4) бесконечно много
2. Количество плоскостей, проходящих через одну точку пространства
   1) ни одной
   2) одну
   3) две
   4) бесконечно много
3. Количество прямых, проходящих через две точки пространства
   1) ни одной
   2) одну
   3) две
   4) бесконечно много
4. Количество плоскостей, проходящих через две точки пространства
   1) ни одной
   2) одну
   3) две
   4) бесконечно много
5. Количество прямых, проходящих через различные пары из трех точек пространства, не принадлежащих одной прямой
   1) ни одной
   2) три
   3) шесть
   4) бесконечно много
6. Количество плоскостей, проходящих через три точки пространства, не принадлежащие одной прямой
   1) ни одной
   2) одну
   3) три
   4) бесконечно много
7. Количество плоскостей, проходящих через три точки пространства, принадлежащие одной прямой
   1) ни одной
   2) одну
   3) три
   4) бесконечно много

8. Число общих точек, имеющих две пересекающиеся плоскости
   1) одну
   2) две
   3) три
   4) бесконечно много
9. Случай, когда центры трех шаров принадлежат одной плоскости
   1) радиусы шаров совпадают
   2) центры шаров принадлежат одной прямой
   3) всегда
   4) никогда
10. Число плоскостей через три вершины куба
   1) одну
   2) три
   3) шесть
   4) бесконечно много

Ключ для самопроверки теста:

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
вариант ответа	4	4	2	4	2	2	4	4	3	1

Параллельность в пространстве

Значение темы:

Математика всегда была неотъемлемой и существеннейшей составной частью человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности.

При знакомстве с темой «Параллельность в пространстве» развивается пространственное воображение, формируется логическое мышление.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- определение параллельных и скрещивающихся прямых;
- теорема о параллельности прямых в пространстве;
- признак параллельности прямых;
- признак параллельности прямой и плоскости;
- признак параллельности плоскостей в пространстве;
- теорема о существовании плоскости, параллельной данной плоскости;
- свойства параллельных плоскостей.

уметь:

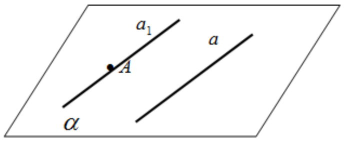
- характеризовать пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые;
- находить на моделях и рисунках пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые;
- правильно изображать на рисунках пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые;
- характеризовать случаи взаимного расположения прямой и плоскости;
- находить на моделях и рисунках прямые, пересекающие плоскость и параллельные ей;
- правильно изображать на рисунках пересечение прямой и плоскости, параллельность прямой и плоскости;
- задавать прямую, параллельную плоскости: доказывать параллельность прямой и плоскости, используя соответствующие свойства;
- характеризовать случаи взаимного расположения плоскостей;
- находить на рисунках пересекающиеся и параллельные плоскости;
- использовать свойства комбинации параллельных плоскостей с прямыми и другими плоскостями для решения задач.

Краткое содержание темы

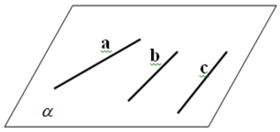
Параллельность в пространстве

Опр: Две прямые в пространстве называются ***параллельными,*** если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называться ***скрещивающимися.***

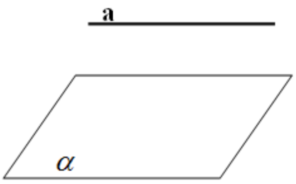
Теорема: (о параллельности прямых в пространстве): *Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.*



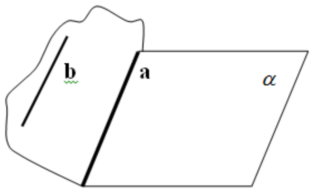
Теорема: (признак параллельности прямых): *Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.*



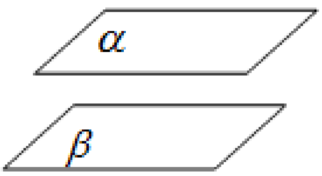
Опр: Прямая и плоскость называются ***параллельными,*** если они не пересекаются.



Теорема: (признак параллельности прямой плоскости): Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости. Если прямая $b \notin \alpha$, $a \in \alpha$ и $bIIa$, то $bII\alpha$

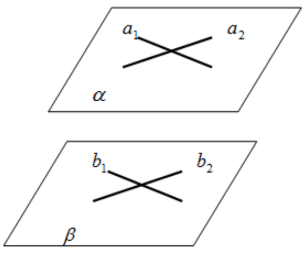


Опр: Две плоскости называются ***параллельными,*** если они не пересекаются.



Если α не пересекается с β, то $\alpha II\beta$

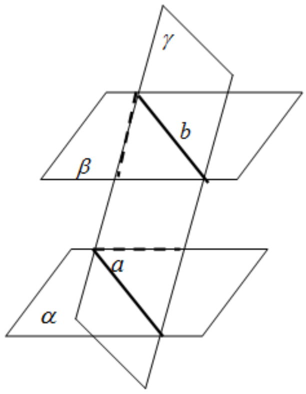
Теорема: (признак параллельности плоскостей в пространстве): *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*



Теорема: (о существовании плоскости параллельной данной плоскости): *Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной и притом только одну.*

Свойства параллельных плоскостей:

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.



Пусть $\alpha II \beta$. Если γ пересекает α и β по прямым a и b, то $aIIb$

Следствие: Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

Пример:

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$-куб

Найти (объяснить расположение в пространстве):

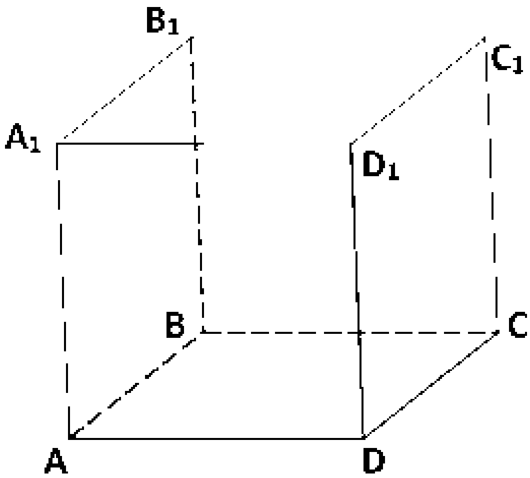
а) Параллельную прямую к прямой A_1D_1

б) Параллельную плоскость к прямой CC_1

Решение:

а) Рассмотрим плоскость AA_1D_1D: $A_1D_1 \parallel AD$ (*по определению параллельных прямых*). Рассмотрим плоскость $A_1B_1C_1D_1$: $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ (*по определению параллельных прямых*).

б) По определению параллельности прямой и плоскости: $CC_1 \parallel A_1B_1C_1D_1$; $CC_1 \parallel ABCD$.



Вопросы для самоподготовки:

1. Какие прямые в пространстве называются параллельными.
2. Какие прямые в пространстве называются скрещивающимися.
3. Сформулируйте теорему о параллельности прямых в пространстве.
4. Сформулируйте признак параллельности прямых.
5. Что значит, прямая и плоскость параллельны?
6. Какие плоскости называются параллельными?
7. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.

Тест для самоконтроля:

1. Даны две параллельные прямые a и b. Через прямую a проходит плоскость α, не совпадающая с плоскостью данных прямых. Взаимное расположение прямой b и плоскости α.
   1) b лежит в плоскости α
   2) b пересекает плоскость α
   3) b параллельна плоскости α
   4) нельзя определить
2. Наибольшее число плоскостей проходит через различные пары из трех параллельных прямых
   1) одну
   2) две
   3) три
   4) шесть
3. Наибольшее число плоскостей проходит через различные пары из четырех параллельных прямых
   1) одну
   2) две
   3) четыре
   4) шесть
4. Через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость. Эти две плоскости пересекаются. Расположение их линии пересечения относительно данных прямых
   1) параллельна им
   2) пересекает их
   3) совпадает с одной из них
   4) скрещивается с ними
5. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и точка A, принадлежащая прямой a. Расположение прямой a по отношению к проходящей через точку A и прямую b плоскости
   1) прямая a пересекает плоскость
   2) прямая a параллельна плоскости
   3) прямая a лежит в плоскости
   4) нельзя определить

6. Даны скрещивающиеся прямые c, d и точка K. Расположение относительно друг друга плоскости, проходящие через точку K и прямую c и точку K и прямую d
   1) совпадают
   2) пересекаются
   3) параллельны
   4) нельзя определить
7. Плоскость α пересекается с прямой a, которая параллельна плоскости β. Расположение относительно друг друга плоскости α и β
   1) параллельны
   2) совпадают
   3) пересекаются
   4) нельзя определить
8. Геометрическое место прямых, пересекающих две данные параллельные прямые
   1) параллельная им прямая, лежащая в плоскости данных прямых
   2) плоскость данных прямых
   3) прямая, параллельная плоскости данных прямых
   4) две пересекающиеся прямые
9. Геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной плоскости
   1) прямая, параллельная данной плоскости и проходящая через данную точку
   2) две прямые, параллельные данной плоскости и проходящие через данную точку
   3) плоскость, параллельная данной плоскости и проходящая через данную точку
   4) окружность, проходящая через данную точку
10. Случай параллельной проекцией двух параллельных прямых являются две точки
    1) прямые параллельны плоскости проектирования
    2) прямые параллельны направлению проектирования
    3) плоскость прямых совпадает с плоскостью проектирования
    4) плоскость прямых не параллельна направлению проектирования

Ключ для самопроверки теста:

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
вариант ответа	3	3	4	1	1	2	3	2	3	2

Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве

Значение темы:

Математика всегда была неотъемлемой и существеннейшей составной частью человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности.

При знакомстве с темой «Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве» развивается пространственное воображение, формируется логическое мышление.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- определение перпендикулярных прямых и плоскостей в пространстве;
- определение перпендикулярных плоскостей;
- теорема о перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве;
- признак перпендикулярности прямой и плоскости;
- свойства перпендикулярных прямой и плоскости;
- определение перпендикуляра, наклонной, проекции наклонной;
- теорема о трёх перпендикулярах;
- определение перпендикулярных плоскостей в пространстве.
- признак перпендикулярности плоскостей.
- определение общего перпендикуляра.
- определение расстояния между скрещивающимися прямыми.

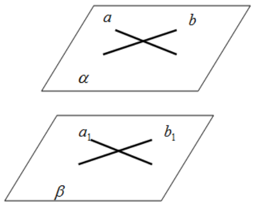
уметь:

- характеризовать перпендикулярность прямой и плоскости;
- задавать прямую, перпендикулярную плоскости;
- использовать свойства перпендикулярности прямой и плоскости для решения задач;
- находить на моделях и рисунках прямые, перпендикулярные плоскостям;
- находить на моделях и рисунках перпендикулярные плоскости;
- находить расстояние между скрещивающимися прямыми;
- использовать признак перпендикулярности плоскостей для решения задач.

Краткое содержание темы

Опр: Две прямые называются ***перпендикулярными,*** если они пересекаются под прямым углом.

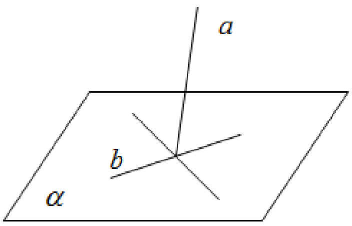
Теорема: (о перпендикулярности прямых в пространстве): *Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.*



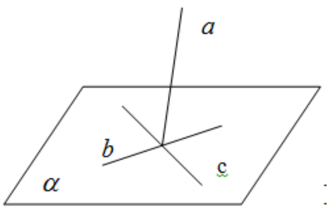
Если a пересекает b; $a_1 \perp b_1$ и $alla_1$, $bllb_1$, то $a \perp b$

Опр: Прямая, пересекающая плоскость, называется ***перпендикулярной*** этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения.

$a \perp \alpha$, если $a \perp$ любой b, $b \in \alpha$ и $b \in A$



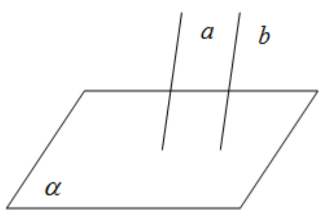
Теорема: (признак перпендикулярности прямой и плоскости): *Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.*



Если $a \perp b$ и $a \perp c$, то $a \perp \alpha$

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости

Свойства 1: *Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой*



$allb$ Если $\alpha \perp a$, то $\alpha \perp b$

Свойства 2: *Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.* Если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $allb$

Перпендикуляр и наклонная

Пусть дана плоскость и не лежащая на ней точка.

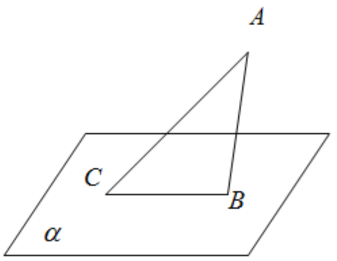
Опр: *Перпендикуляром***,** опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра***.**

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Опр: *Наклонной***,** проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной***.**

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной.*

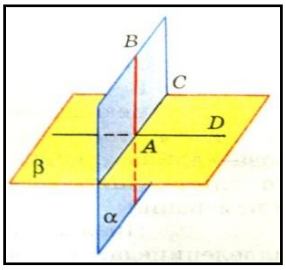


AB – перпендикуляр, B – основание перпендикуляра
AC – наклонная, C – основание наклонной
CB – проекция наклонной

Теорема (о трех перпендикулярах): *Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной.*

Теорема (обратная о трех перпендикулярах): *Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.*

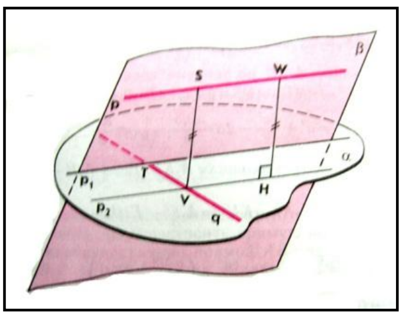
Теорема (признак перпендикулярности плоскостей): *Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.*



Расстояние между скрещивающимися прямыми

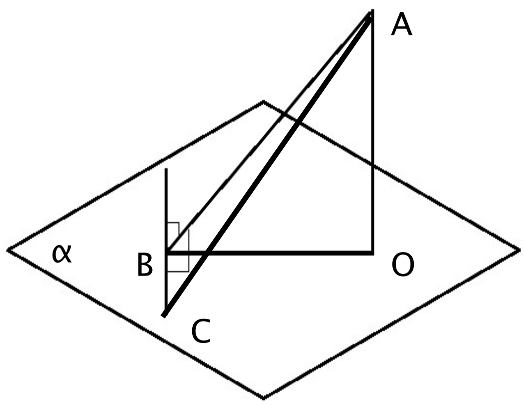
Опр: *Общим перпендикуляром* двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них

Теорема: Две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один.



Пример:

Дано: AB-наклонная,
B –основание наклонной,
OA-проекция наклонной,
BC- параллельна OB
AB=4 см, BC=3 см.
Найти: AC
Решение:



1. По теореме (о трех перпендикулярах) AB перпендикулярна BC (угол ABC=90^0).
2. Сторона AC является гипотенузой в прямоугольном треугольнике ABC, а стороны BC и AB - катеты.
3. Значит, по теореме Пифагора (квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов $AC^2=AB^2+BC^2$)
4. $AC^2=4^2+3^2=16+9=25$
5. AC=5 см

*Ответ:*AC=5 см

Вопросы для самоподготовки:

1. Дайте определение перпендикулярным прямым.
2. Какая прямая называется перпендикулярной плоскости? Приведите пример.
3. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах (и обратную к ней)
5. Какая плоскость называется перпендикулярной к данной.
6. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.
7. Как измерить расстояние между скрещивающимися прямыми.

Тест для самоконтроля:

1.Угол между пересекающимися диагоналями граней куба

1) 30^0
2) 45^0
3) 60^0
4) 90^0

2. В кубе $A...D_1$.Угол между прямымиAD_1 и CB_1 равны…

1) 30^0
2) 45^0
3) 60^0
4) 90^0

3. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, основанием которого является квадрат, в два раза больше стороны основания. Углы лежат в одном диагональном сечении. Углы между диагоналями параллелепипеда равны

1) 45^0 и 45^0
2) 90^0 и 90^0
3) 30^0 и 60^0
4) 60^0 и 120^0

4. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, основанием которого является квадрат, в два раза больше стороны основания. Углы лежат в разных диагональных сечениях. Углы между диагоналями параллелепипеда равны

1) 45^0 и 135^0
2) 90^0 и 90^0
3) 30^0 и 150^0
4) 60^0 и 120^0

5.Угол между скрещивающимися ребрами правильной треугольной пирамиды

1) 30^0
2) 45^0
3) 60^0
4) 90^0

6. Из точки, не принадлежащей плоскости, опущен на нее перпендикуляр и проведена наклонная. Перпендикуляр равен 12 см, а наклонная 15 см. Проекция наклонной равна

1) 3 см
2) 9 см
3) 27 см
4) 81 см

7. Геометрическое место прямых, перпендикулярных данной прямой и проходящих через данную на ней точку

1) прямая, перпендикулярная данной прямой и проходящая через данную точку
2) плоскость, перпендикулярная данной прямой
3) плоскость, параллельная данной прямой
4) плоскость, перпендикулярная данной прямой и проходящая через данную точку

8.Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек

1) перпендикуляр, проведенный к середине отрезка, соединяющего данные точки
2) прямая, параллельная прямой, проходящей через данные точки
3) плоскость, перпендикулярная прямой, проходящей через данные точки
4) плоскость, перпендикулярная отрезку, соединяющему данные точки и проходящая через его середину

9.Из данной точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Зная, что их разность равна 25 см, а расстояние между их серединами 32,5 см, найдите наклонную.

1) 7,5 см.
2) 57,5 см.
3) 97 см.
4) 169 см.

10. Концы отрезка находятся от данной плоскости на расстоянии 26 см и 37 см. Его ортогональная проекция на плоскость равна 6 дм. Найдите отрезок.

1) 61 см.
2) 63 см.
3) 64 см.
4) 65 см.

11. Один из катетов прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости, а другой наклонен к ней под углом 45^0. Найдите угол между гипотенузой этого треугольника и данной плоскостью.

1) 15^0.
2) 30^0.
3) 45^0.
4) 60^0.

12. Найдите угол наклона отрезка к плоскости, если его ортогональная проекция на эту плоскость в два раза меньше самого отрезка.

1) 30^0.
2) 45^0.
3) 60^0.
4) 90^0.

13. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от всех точек окружности.

1) Центр окружности.
2) Окружность.
3) Плоскость, перпендикулярная плоскости окружности и проходящая через ее центр.
4) Прямая, перпендикулярная плоскости окружности и проходящая через ее центр.

14.Геометрическое место точек, равноудаленных от всех сторон ромба

1) Перпендикуляр, проведенный к плоскости ромба и проходящий через его вершину.
2) Плоскость, перпендикулярная к плоскости ромба и проходящая через его диагональ.
3) Перпендикуляр, проведенный к плоскости ромба и проходящий через точку пересечения его диагоналей.
4) Окружность, вписанная в ромб.

15.Если сторона ее основания равна a, боковое ребро b. Высота правильной треугольной пирамиды равна…

1) $\sqrt{b^2 - a^2}$.

2) $\frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$.

3) $\frac{1}{3}\sqrt{3(3b^2 - a^2)}$.

4) $\frac{1}{3}\sqrt{b^2 - a^2}$.

16.Все ребра боковой правильной четырехугольной пирамиды равны 1. Двугранный угол φ между боковыми гранями равен…

1) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

2) $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

3) $\cos\varphi = \frac{2}{3}$.

4) $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. Точка A находится от одной из двух перпендикулярных плоскостей на расстоянии 4 см, а от другой на 16 см. Расстояние от точки A до линии пересечения плоскостей равно

1) 6 см

2) 16 см

3) $2\sqrt{5}$ см

4) $4\sqrt{17}$ см

18.Если высота правильной четырехугольной пирамиды равна 2 см, а сторона основания 4 см. Двугранный угол при основании равен

1) 30^0

2) 45^0

3) 60^0

4) 90^0

19. Точка B, удаленная от ребра двугранного угла на расстояние a, отстоит от каждой его грани на одинаковое расстояние, если двугранный угол равен φ, то расстояние равно

1) $a\sin\varphi$

2) $a\sin\frac{\varphi}{2}$

3) $a\cos\varphi$

4) $a\cos\frac{\varphi}{2}$

20. Точка E принадлежит плоскости φ, точка F принадлежит плоскости φ. Плоскости перпендикулярны. Ортогональные проекции отрезка EF, равного 10 см, на плоскости φ и $\varphi 1$ соответственно равны 8 см и 7,5 см. Проекция отрезка EF на линию пересечения плоскостей φ и $\varphi 1$ равна…

1) 4,5 см
2) 6 см
3) 15,5 см
4) 20 см

Ключ для самопроверки теста:

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
вариант ответа	3	4	2	4	4	2	4	4	3	1	2	3	4	3	3	2	4	2	2	1

Углы между прямыми и плоскостями в пространстве

Математика всегда была неотъемлемой и существеннейшей составной частью человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности.

При знакомстве с темой «Углы между прямыми и плоскостями в пространстве» развивается пространственное воображение, формируется логическое мышление.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- определение угла между скрещивающимися прямыми;
- определение угла между прямой и плоскостью;
- определение угла между плоскостями;
- определение двугранного, трёхгранного и многогранного углов.

уметь:

- определять полупрямые, задающие угол между прямой и плоскостью;
- задавать линейный угол двугранного угла и изображать его на рисунке;
- измерять угол между прямой и плоскостью, линейный угол двугранного угла.

Краткое содержание темы

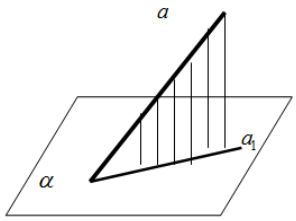
Определение угла между скрещивающимися прямыми

Опр: Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Определение угла между прямой и плоскостью

Опр: Пусть даны плоскость α и прямая a пересекающая плоскость. Основания перпендикуляров опущенных из точек прямой a на плоскость α, лежат на прямой a_1. Это прямая называется проекцией прямой a на плоскость α.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

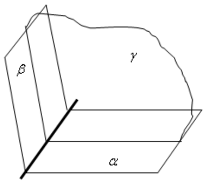


Дано α, a пересекает α. $\angle(\alpha; a) = \angle(a; a_1)$

Определение угла между плоскостями

Опр: Угол между параллельными плоскостями равен нулю.

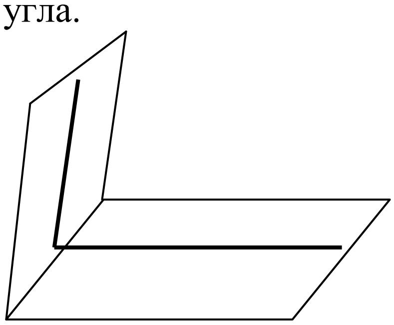
Опр: Пусть данные плоскости пересекаются. Проведем плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется *углом между данными плоскостями.*



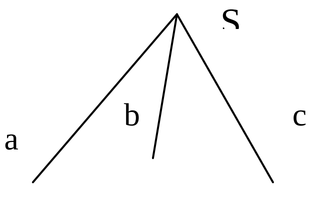
$$\angle(\alpha;\beta) = \angle(a;b)$$

Определение двугранного, трёхгранного и многогранного углов

Опр: *Двугранным углом* называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой. Полуплоскости называются *гранями*, а ограничивающая их прямая – *ребром* двугранного угла.



Опр: Рассмотрим три луча а, в, с, исходящие из одной точки и не лежащие в одной плоскости. *Трехгранным углом* (авс, называется фигура), составленная из трех плоских углов (ав), (вс) и (ас). Эти углы называются *гранями* трехгранного угла, а их стороны – *ребрами***.** Общая вершина плоских углов называется вершиной трехгранного угла. Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называются *двугранными углами трехгранного угла.*



Вопросы для самоподготовки:

1. Как измерить угол между скрещивающимися прямыми?
2. Как измерить угол между прямой и плоскостью?
3. Дайте определение угла между плоскостями.
4. Как измерить угол между пересекающимися плоскостями?
5. Что такое двугранный угол. Как он измеряется.
6. Объясните, что такое трехгранный угол.

Тест для самоконтроля:

1. Фигура образованная двумя полуплоскостями, не принадлежащая ни одной плоскости с общей ограничивающей их прямой
   1) двугранный угол
   2) трехгранный угол
   3) линейный угол
   4) многогранный угол
2. Измерение линейного угла
   1) градусная мера двугранного угла
   2) градусная мера
   3) радианная мера угла
3. Отрезок наклонной имеет длину 8 см и угол между наклонной и плоскостью равен 60^0. Проекция отрезка равна
   1) 4 см
   2) $4\sqrt{2}$ см
   3) $4\sqrt{3}$ см
   4) $8\sqrt{2}$ см
4. Угол между параллельными плоскостями
   1) 0
   2) 90^0
   3) 45^0
   4) 60^0
5. Полуплоскости двугранного угла
   1) ребро
   2) грань
   3) линейный угол
6. Ограничивающая прямая двугранного угла
   1) ребро
   2) грань
   3) линейный угол
7. Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла
   1) двугранными углами трехгранного угла
   2) трехгранными углами двугранного угла
   3) двухгранный угол
   4) линейный угол
8. Составные части трехгранного угла
   1) три плоских угла
   2) четыре плоских угла
   3) один плоский угол

Ключ для самопроверки теста:

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Вариант ответа	1	1	1	1	2	1	1	1

Самостоятельная работа:

Решите задачу:

Все грани параллелепипеда – равные ромбы, со стороной a и острым углом α. Найдите высоту параллелепипеда.

Ответ:

$$h=\frac{a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Геометрические преобразования в пространстве

Значение темы:

Математика всегда была неотъемлемой и существеннейшей составной частью человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности.

При знакомстве с темой «Геометрические преобразования в пространстве» развивается пространственное воображение, формируется логическое мышление.

Симметрия сопровождает нас в мире растений, в мире животных, в мире кристаллов, в быту.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

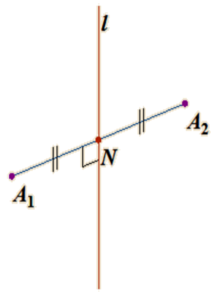
- Геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости.
- Параллельное проектирование. *Площадь ортогональной проекции*. Изображение пространственных фигур.

уметь:

- Выполнять геометрические преобразования пространства

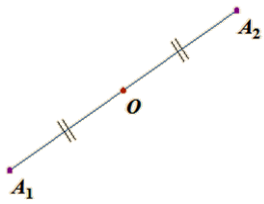
Краткое содержание темы

1. *Осевая симметрия:*



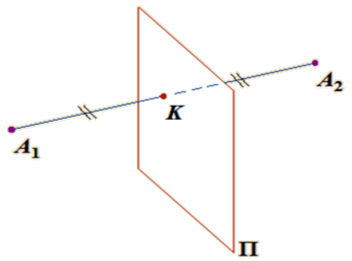
$$A_1 \to A_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N = A_1A_2 \cap l \\ A_1N = A_2N \\ l \perp A_1A_2 \end{cases}$$

2. *Центральная симметрия:*



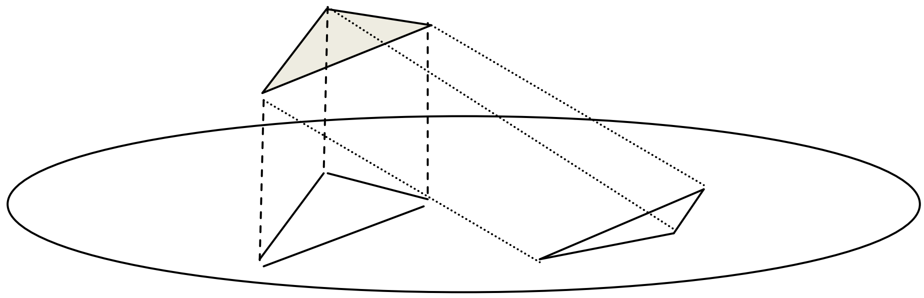
$$A_1 \to A_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} O \in A_1A_2 \\ A_1O = A_2O \end{cases}$$

3. Зеркальная симметрия:

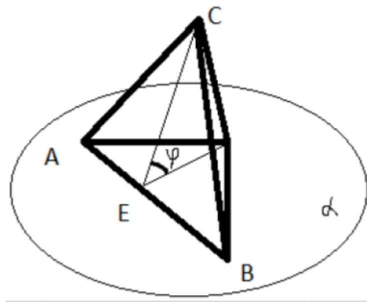


$$A_1 \to A_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} K = A_1A_2 \cap \Pi \\ A_1K = A_2K \\ \Pi \perp A_1A_2 \end{cases}$$

4. Параллельное проектирование:



Ортогональное проектирование:



Параллельное проектирование, при котором проектирующие прямые перпендикулярны к плоскости проекций, называется *ортогональным проектированием*

Теорема: Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции: $S_{пр} = S\cos\varphi$

Пример: Дан равносторонний со стороной *а*. Найдите площадь его ортогональной проекции на плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол 60^0.

Решение:

Пусть треугольник ABC – данный, равносторонний. Проведем высоту CE и CD – перпендикуляр к плоскости α. Тогда по теореме о трех перпендикулярах её проекция ED будет высотой треугольника ADB, угол CED – угол между плоскостями ACD и α., т.е. $\angle CED = \varphi$

Из прямоугольного треугольника CED: ED=CEcosφ.

ADB – ортогональная проекция треугольника ACB на плоскость α. Тогда $S_{ADB} = \frac{1}{2}AB \cdot DE = \frac{1}{2}AB \cdot CE \cdot \cos\varphi$, $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, так как DABC –равносторонний.

Тогда $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \cos\varphi$.

$\varphi=60^0$, $S_{ADB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. *Ответ:* $S_{ADB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

Вопросы для самоподготовки:

1. Объясните, какие точки называются симметричными относительно данной точки.
2. Какое преобразование называется симметричными относительно данной точки.
3. Какая фигура называется центрально-симметричной?
4. Что такое центр симметрии?
5. Какое преобразование называется симметрией относительно данной прямой?
6. Что такое ось симметрии?
7. Приведите примеры фигур, проекцией которых служит: точка, треугольник, круг, квадрат, параллелограмм, пара пересекающихся прямых?
8. Будет ли средняя линия изображения трапеции изображением средней линии оригинала?

Призма. Параллелепипед. Куб

«Никогда до настоящего времени мы не жили в такой геометрический период. Все вокруг – геометрия». Эти слова, сказанные великим французским архитектором Ле Корбюзье в начале 20 века, очень точно характеризуют и наше время. Мир, в котором мы живем, наполнен геометрией домов и улиц, гор и полей, творениями природы и человека. Форму шестиугольной призмы имеют соты пчел, кристаллическую решетку в форме призм имеют и многие химические вещества

При знакомстве с темой «Призма. Параллелепипед. Куб» развивается пространственное воображение, формируется логическое и критическое мышление, кругозор.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- определение многогранника;
- определение призмы, её элементов;
- свойства призмы;
- определение прямой призмы;
- определение параллелепипеда;
- определение куба;
- свойства параллелепипеда;

уметь:

- различать и показывать на моделях прямую и правильную призмы, прямоугольный параллелепипед, куб;
- изображать на рисунках четырехугольные и треугольные призмы и их элементы;
- использовать свойства призмы, параллелепипеда и куба при решении стереометрических задач.

Краткое содержание темы

Многогранник – это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

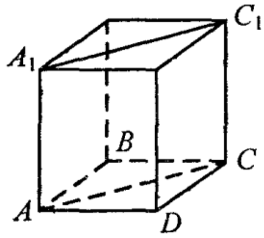
Призмой называется многогранник, у которого две грани (основания) лежат в параллельных плоскостях, а все ребра вне этих граней параллельны между собой.

Пример:

У призмы одно боковое ребро перпендикулярно плоскости основания. Докажите, что остальные боковые ребра тоже перпендикулярны плоскости основания.

Решение:

Боковые ребра призмы параллельны между собой, так что поскольку одно ребро перпендикулярно основанию, то значит, и остальные ребра тоже перпендикулярны основанию. Что и требовалось доказать.



Пример: Сколько диагоналей имеет n-угольная призма?

Решение: так как диагональ призмы – это отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, то из одной вершины можно провести n-3 различные диагонали. Но вершин в основании n, так что общее количество диагоналей будет n(n-3).

Ответ: n(n-3).

Вопросы для самоподготовки:

1. Дайте определение многограннику
2. Какой многогранник называется призмой?
3. Назовите элементы призмы
4. Какой многогранник называется пирамида?
5. Назовите элементы пирамиды
6. Какая призма называется прямой, правильной?
7. Какой многогранник называется параллелепипедом, кубом?
8. Назовите правильные многогранники?
9. Каким соотношением связаны между собой число вершин, рёбер и граней правильных многогранников?

Тест для самоконтроля:

1. Два плоских угла трехгранного угла равны 98^0 и 62^0. Предел нахождения третьего плоского угла α?

1) $62^0 < \alpha < 98^0$
2) $0^0 < \alpha < 160^0$
3) $0^0 < \alpha < 36^0$
4) $36^0 < \alpha < 160^0$

2.Плоские углы трехгранных углов правильной шестиугольной призмы

1) $45^0, 45^0, 120^0$
2) $60^0, 60^0, 120^0$
3) $90^0, 90^0, 120^0$
4) $90^0, 60^0, 60^0$

3. Плоские углы 4-гранных углов правильной 4-угольной пирамиды, высота которой в два раза меньше диагонали основания

1) 30^0
2) 45^0
3) 60^0
4) 90^0

4. В правильной четырехугольной пирамиде отношение стороны основания к высоте равно $\sqrt{2}$. Плоские углы ее трехгранных углов

1) 30^0, 30^0, 90^0
2) 90^0, 60^0, 45^0
3) 60^0, 90^0, 60^0
4) 60^0, 60^0, 60^0

5.Количество плоских углов в 5-угольной призме

1) 10
2) 15
3) 30
4) 50

6.Количество плоских углов в 11-угольной пирамиде.

1) 11
2) 44
3) 55
4) 33

7. Сумма плоских углов 6-угольной призмы равна

1) 1440^0
2) 3600^0
3) 3960^0
4) 4320^0

8. Вид призмы, сумма плоских углов которой равна 2160^0

1) 8-угольная
2) 4-угольная
3) 3-угольная
4) 5-угольная

9. Количество диагоналей можно провести в кубе

1) 2
2) 4
3) 8
4) 16

10. Ребро куба равно *a*. Площадь его диагонального сечения равна

1) a^2
2) $2a^2$
3) $a^2\sqrt{2}$
4) $2a^2\sqrt{2}$

Ключ для самоконтроля:

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Вариант ответа	4	3	3	3	3	2	2	2	2	3

Самостоятельная работа:

Решите задачи:

№ 1.

Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна площади основания. Вычислите длину бокового ребра, если сторона основания 7см.

Ответ: длина бокового ребра правильной треугольной призмы равна $\frac{7\sqrt{3}}{12}$

№ 2.

Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из вершин его верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Определите высоту параллелепипеда, если диагональ основания равна 8 см, а боковое ребро равно 5 см.

Ответ: высота параллелепипеда равна 3 см.

Пирамида. Тетраэдр.

Значение темы:

«Никогда до настоящего времени мы не жили в такой геометрический период. Все вокруг – геометрия». Эти слова, сказанные великим французским архитектором Ле Корбюзье в начале 20 века, очень точно характеризуют и наше время. Мир, в котором мы живем, наполнен геометрией домов и улиц, гор и полей, творениями природы и человека. Всем нам известны египетские пирамиды, самая известная из них, пирамида Хеопса. В природе встречаются не только такие огромные пирамиды, но и очень маленькие. Так, например, элементарная ячейка кристалла алмаза имеет тетраэдрическое строение, пространственное строение молекулы метана вписывается в геометрическую фигуру тетраэдр.

При знакомстве с темой «Пирамида. Тетраэдр» развивается пространственное воображение, формируется логическое и критическое мышление. Знания, полученные на занятиях по математике, пригодятся вам на занятиях по химии, биологии, истории др.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- определение пирамиды и её элементов;
- определение усеченной и правильной пирамиды;
- определение апофемы.

уметь:

- различать и показывать на моделях пирамиду и правильную пирамиду;
- изображать на рисунках треугольные и четырехугольные пирамиды и их элементы;
- в несложных случаях изображать на рисунках треугольных и четырехугольных пирамид высоту пирамиды, связывая её элементы на основе соответствующих свойств;
- использовать свойства пирамиды, усеченной пирамиды при решении стереометрических задач.

Краткое содержание темы

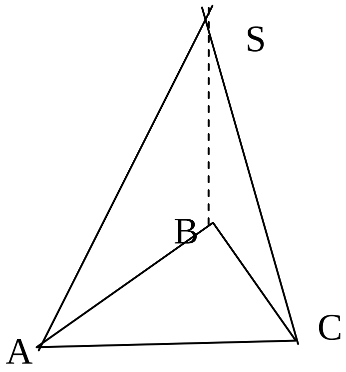
Многогранник – это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Многогранник, у которого одна грань, называемая основанием, – многоугольник, а другие грани – треугольники с общей вершиной, называется **пирамидой**.

Часть пирамиды, лежащая между основанием и параллельным основанию сечением, называется **усеченной пирамидой**.

Опр: *Высотой* пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Опр: Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.



Свойства правильной пирамиды:

- боковые ребра правильной пирамиды равны;
- в правильной пирамиде все боковые грани - равные равнобедренные треугольники;
- в любую правильную пирамиду можно вписать сферу,
- около любой правильной пирамиды можно описать сферу;
- если центры вписанной и описанной сферы совпадают, то сумма плоских углов при вершине пирамиды равна π, а каждый из них соответственно, где n — количество сторон многоугольника основания;
- площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Пример: Основание тетраэдра DABC треугольник со сторонами 13 см,14 см, 15 см. Расстояние от точки D до сторон треугольника основания равны 5 см. Найти расстояние от точки D до плоскости ABC.
Решение:
Расстояние от вершины до плоскости основания равно высоте, которая опущена из вершины на основание.
Величины апофемы пирамиды равны по условию задачи. Таким образом, прямоугольные треугольники, образованные высотой пирамиды, апофемой и отрезком, соединяющим высоту и точку касания апофемы и основания - равны. Откуда - высота, опущенная из вершины - является центром вписанной в основание окружности.
Найдем радиус вписанной в основание окружности. Формула радиуса окружности, вписанной в произвольный треугольник:

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

p = (13 + 14 + 15) / 2 = 21
r = 4

Таким образом, расстояние от точки D до плоскости основания равно длине высоты, опущенной из вершины на основание. По теореме Пифагора:
$5^2 = h^2 + 4^2$
$h^2 = 25 - 16$
$h^2 = 9$
$h = 3$
Ответ: 3 см.

Вопросы для самоподготовки:

1. Какой многогранник называется пирамида?
2. Назовите элементы пирамиды
3. Какая призма называется прямой, правильной?
4. Какой многогранник называется параллелепипедом, кубом?
5. Назовите правильные многогранники?
6. Каким соотношением связаны между собой число вершин, рёбер и граней правильных многогранников?

Тест для самоконтроля:

1. Пирамида в основании, которой треугольник
   1) тетраэдр
   2) призма
   3) треугольная пирамида
2. Расположение высоты, если боковые ребра равны
   1) высота падает в центр описанной окружности
   2) высота падает в центр вписанной окружности
   3) высота равна боковым ребрам
3. Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания
   1) боковые ребра
   2) высота
   3) грань
4. Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания
   1) ребра
   2) грань
   3) высота
5. Пирамида называется правильной
   1) если ее основание – правильный многоугольник, а ее боковые ребра равны
   2) боковые грани равны
   3) Все грани и ребра равны
6. В основании четырехугольной пирамиды лежит
   1) четырех угольник
   2) многоугольник
   3) основание

7. Вершина пирамиды – это
   1) точка, не лежащая в плоскости основания, в которой пересекаются боковые ребра
   2) точка, не лежащая в плоскости основания и соединяющая вершины основания отрезками
   3) точка, не лежащая в плоскости основания и соединяющая грани
   4) перпендикуляр, опущенный на основание
8. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 4 см, а боковое ребро равно 5 см. Высота пирамиды равна
   1) 9 см
   2) 3 см
   3) $\sqrt{41}$ см
9. Апофема – это
   1) высота в пирамиде
   2) перпендикуляр в пирамиде
   3) высота в боковой грани
10. Высота пирамиды равна 3см. Расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания равно
    1) 3 см
    2) 6 см
    3) 9 см
11. Наименьшее число граней может иметь пирамида
    1) 3 см
    2) 6 см
    3) 9 см

Ключ для самоконтроля:

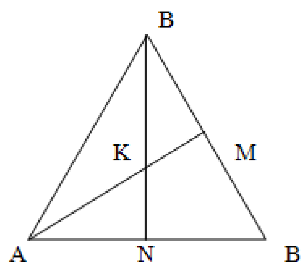
№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Вариант ответа	2	2	2	1	2	1	1	1	1,3	3	3	1	2	1	1

Самостоятельная работа:

Решите задачи:

№ 1.

Найдите угол между двумя скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра.

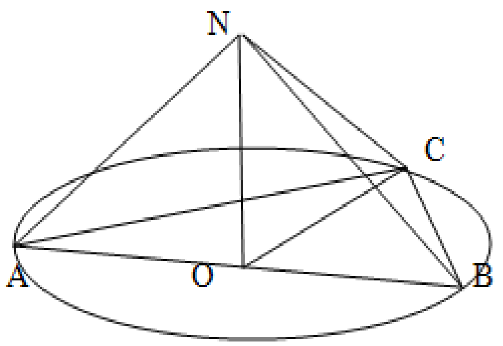


Примечание: Обратите внимание на вид тетраэдра, что представляет собой каждая из его граней.

Ответ: Медианы пересекаются под углом 60 градусов

№ 2.

В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого 8см, а радиус описанной около него окружности равен 5 см. Основанием высоты этой пирамиды является середина гипотенузы. Высота пирамиды равна 12см. Вычислить боковые ребра пирамиды.



Примечание: Обратите внимание сначала на центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, где он расположен.

Ответ: 13, 13 , √183

№ 3.

Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а боковая грань образует с основанием угол 60 градусов. Найдите высоту пирамиды.

Ответ:√6

Симметрия в многогранниках

Значение темы:

С симметрией мы часто встречаемся в природе, архитектуре, технике, быту, некоторые виды деталей имеют ось симметрии. Почти все кристаллы, встречающиеся в природе, имеют центр, ось и плоскость симметрии.

При знакомстве с темой «Симметрия в многогранниках» вы познакомитесь с правильными многогранниками и их симметрией, вам открываются не только удивительные свойства геометрических фигур, но и пути познания природной гармонии.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать*:*

- симметрии в кубе, в параллелепипеде, в призме и пирамиде.

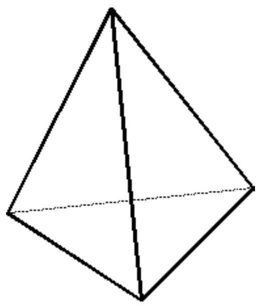
уметь*:*

- изображать на рисунках многогранников центр, ось и плоскость симметрии;
- решать задачи, используя свойства симметрии многогранников.

Краткое содержание темы:

Виды правильных многогранников

Тетраэдр

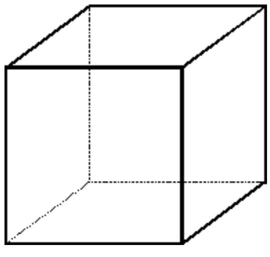


Тетраэдр составлен из четырех равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трех треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180 градусов. Таким образом, тетраэдр имеет 4 грани, 4 вершины и 6 ребер.

Элементы симметрии:

Тетраэдр не имеет центра симметрии, но имеет 3 оси симметрии и 6 плоскостей симметрии.

Куб

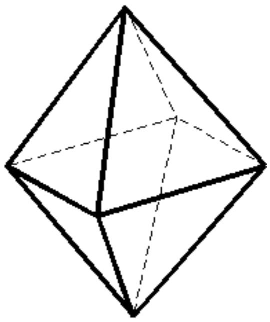


Куб составлен из шести квадратов. Каждая его вершина является вершиной трех квадратов. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 270 градусов. Таким образом, куб имеет 6 граней, 8 вершин и 12 ребер.

Элементы симметрии:

Куб имеет центр симметрии - центр куба, 9 осей симметрии и 9 плоскостей симметрии.

Октаэдр

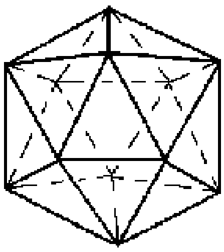


Октаэдр составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной четырех треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 240 градусов. Таким образом, октаэдр имеет 8 граней, 6 вершин и 12 ребер.

Элементы симметрии:

Октаэдр имеет центр симметрии - центр октаэдра, 9 осей симметрии и 9 плоскостей симметрии.

Икосаэдр

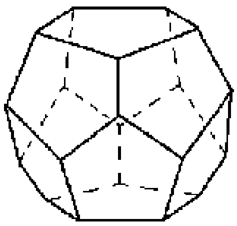


Икосаэдр составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной пяти треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 300 градусов. Таким образом, икосаэдр имеет 20 граней, 12 вершин и 30 ребер.

Элементы симметрии:

Икосаэдр имеет центр симметрии - центр икосаэдра, 15 осей симметрии и 15 плоскостей симметрии.

Додекаэдр



Додекаэдр составлен из двенадцати равносторонних пятиугольников. Каждая его вершина является вершиной трех пятиугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 324 градусов. Таким образом, додекаэдр имеет 12 граней, 20 вершин и 30 ребер.

Элементы симметрии: Додекаэдр имеет центр симметрии - центр додекаэдра, 15 осей симметрии и 15 плоскостей симметрии.

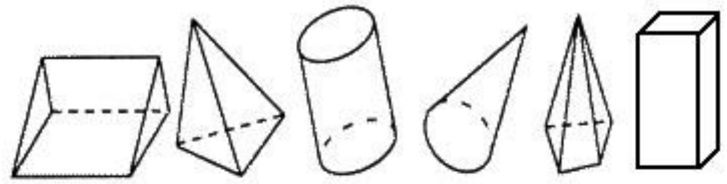
Правильные многогранники. Теорема Эйлера.

Название	Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр
Число граней и их форма	4	6	8	12
Число ребер	6	12	12	30
Число вершин	4	8	6	20

Теорема Эйлера: Число вершин - число ребер + число граней =2

Вопросы для самоподготовки:

1. Дайте определение многогранника.
2. Какой многогранник называют выпуклым?
3. Назовите известные вам многогранники. Среди изображённых тел выберите те, которые являются многогранниками.



1 2 3 4 5 6

4. Какие из них являются призмами? Пирамидами?
5. Какие многогранники называются правильными?
6. Сколько существует правильных многогранников? Назовите их?
7. Сформулируйте теорему Эйлера.
8. Что называется центром, осью и плоскостью симметрии?

Самостоятельная работа:

Решите задачи:

1. Установите связь между числом плоских углов П многогранника и числом его ребер Р.
   Ответ: П = 2Р.

2. Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин В и граней Г, если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Приведите примеры таких многогранников.
   Ответ: а) В = 6, Г = 8, октаэдр; б) В = 7, Г = 10, пятиугольная бипирамида.

3. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин В и граней Г, если у него: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Нарисуйте эти многогранники.
   Ответ: а) В = 8, Г = 6; б) В = 10, Г = 7.

Сечение многогранников

Значение темы:

Сечения многогранников используются при решении многих задач стереометрии.

При знакомстве с темой «Сечения многогранников» развивается пространственное воображение, формируется логическое и критическое мышление**.**

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать*:*

– виды сечений многогранников;
– правила построения сечений;
– построение сечения методом следа.

уметь*:*

– строить простейшие сечения куба, призмы и пирамиды

Краткое содержание темы:

Правила построения сечений многогранников:

1) проводим прямые через точки, лежащие в одной плоскости;
2) ищем прямые пересечения плоскости сечения с гранями многогранника, для этого:
   а) ищем точки пересечения прямой принадлежащей плоскости сечения с прямой, принадлежащей одной из граней (лежащие в одной плоскости);
   б) параллельные грани плоскость сечения пересекает по параллельным прямым.

Методы построения сечений

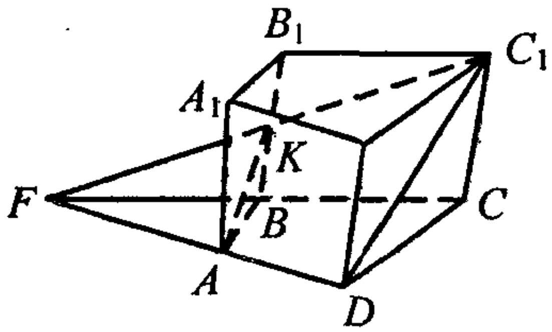
Аксиоматический метод (метод следа)	*Метод вспомогательных сечений*	*Комбинированный метод*
Построение вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани фигуры.	1. Построить вспомогательные сечения и найти линию их пересечения. 2. Построить след сечения на ребре многогранника. 3. Если точек сечения не хватает для построения самого сечения повторить пп.1-2.	Применение теоремы о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с аксиоматическим методом.

Пример:

Постройте сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону основания и через одну из вершин другого основания.

Решение:

Пусть, плоскость проходит через сторону основания AD и вершину C_1, тогда отрезок C_1D принадлежит сечению. Далее, возможны два случая: либо AD пересекает BC, либо нет. Если AD пересекает BC, то точку их пересечения обозначим F. $F \in BC$, а значит $F \in BCC_1$. Проведем отрезок FC_1. Он пересекает BB_1 в точке K. Тогда четырехугольник AKC_1D будет искомым сечением.



Если AD не пересекает BC, то AD параллельна BC, но BC параллельна B_1C_1, так что AD параллельна B_1C_1, а через две параллельные прямые проходит единственная плоскость, содержащая их. Эта плоскость является искомым сечением т.к. точки A, D, C_1 принадлежат этой плоскости.

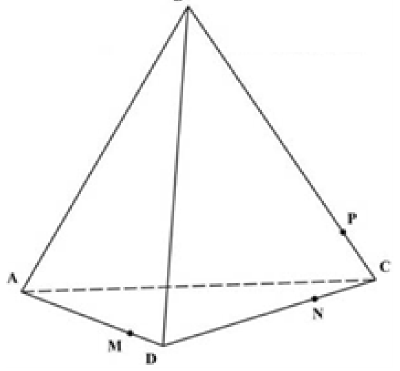
Вопросы для самоподготовки:

1. Дайте определение сечения?
2. Назовите правила построения сечений?
3. Какие методы построения существуют?
4. Какое сечение называется диагональным? Осевым?

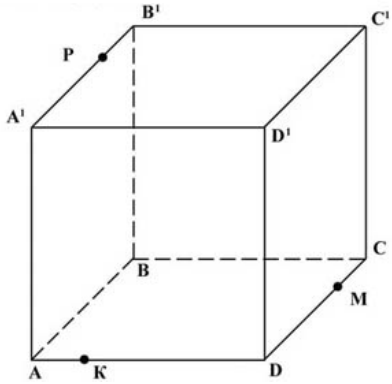
Самостоятельная работа:

Постройте сечения:

№ 1.



№ 2.



Цилиндр

Значение темы:

«Цилиндр» является одной из важнейших тем не только математики, физики, но и повседневной жизни современного человека. В окружающей нас природе существует множество объектов, являющихся физическими моделями указанной фигуры. Например, многие детали машин имеют форму цилиндра или представляют собой некоторое их сочетание, а величественные колонны храмов и соборов, выполненные в форме цилиндров, подчеркивают их гармонию и красоту.

При знакомстве с темой «Цилиндр» развивается пространственное воображение, формируется логическое и критическое мышление, кругозор.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать*:*

- определение цилиндра и его элементов;
- виды сечений цилиндра плоскостями.

уметь*:*

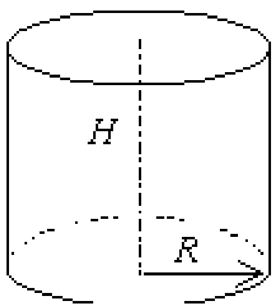
- различать и показывать на моделях цилиндр;
- изображать цилиндр, осевые сечения цилиндра, выделяя их линейные элементы.

Краткое содержание темы

Тела вращения — объёмные тела, возникающие при вращении плоской фигуры, ограниченной кривой, вокруг оси, лежащей в той же плоскости.

Опр: *Цилиндром* называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов.

Круги называются *основаниями* цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точке окружностей кругов, - *образующими* цилиндра.

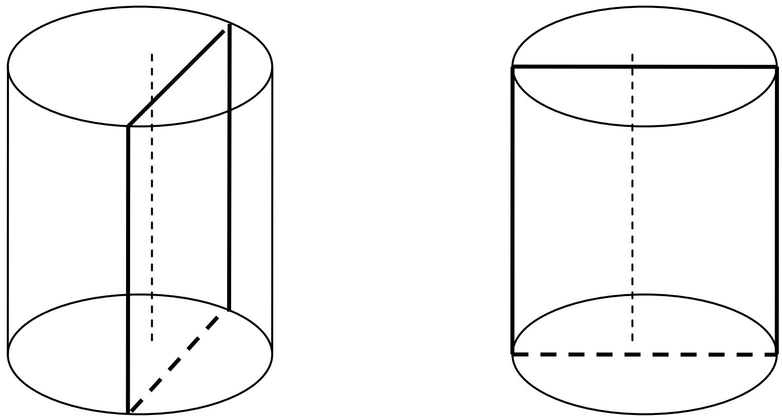


Опр: Цилиндр называется прямым, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

Опр: Радиусом цилиндра называется радиус его основания. Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований. Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим.

Сечение цилиндра плоскостями

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси, представляет собой прямоугольник. Две его стороны – образующие цилиндра, а две другие – параллельные хорды оснований. В частности, прямоугольником является осевое сечение - сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось.



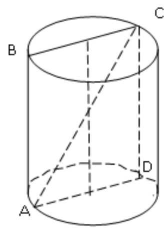
Вопросы для самоподготовки:

1. Какое тело вращения называется цилиндром? Назовите элементы цилиндром.
2. Какое тело называется усеченным цилиндром?
3. Какая фигура получается в результате сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси?
4. Какая фигура получается в результате сечения цилиндра плоскостью, параллельной основанию?

Тест для самоконтроля:

1. Тело, состоящее из двух кругов и всех отрезков, соединяющих точки кругов называется
   1) конусом
   2) шаром
   3) цилиндром
   4) сферой
2. Отрезки, соединяющие точки окружностей кругов, называются
   1) гранями цилиндра
   2) образующими цилиндра
   3) высотами цилиндра
   4) перпендикулярами цилиндра

3. Образующие цилиндра
   1) не равны
   2) перпендикулярны
   3) параллельны и равны
4. Прямая, проходящая через центры оснований
   1) ось цилиндра
   2) высота цилиндра
   3) радиус цилиндра
   4) ребро цилиндра
5. Основания цилиндра лежат
   1) в одной плоскости
   2) в равных плоскостях
   3) в параллельных плоскостях
   4) в разных плоскостях
6. При вращении какой фигуры образуется цилиндр
   1) прямоугольник
   2) прямоугольный треугольник
   3) окружность
7. В цилиндре CD=4 см, AC=5 см. AD равна



   1) 3 см
   2) $\sqrt{41}$ см
   3) 9 см
8. В цилиндре (рис.) CD=4 см, AC=5 см. Радиус цилиндра равен
   1) 2 см
   2) 1,5 см
   3) 4,5 см
9. ABCD – прямоугольник, который вращается вокруг стороны. Известно, что высота прямоугольника 4 см, а радиус 3 см. Диагональ прямоугольника равна
   1) 5 см
   2) 7 см
   3) 1 см
10. Элемент, НЕ принадлежащий цилиндру
   1) апофема
   2) высота
   3) образующая
   4) радиус

Ключ для самоконтроля:

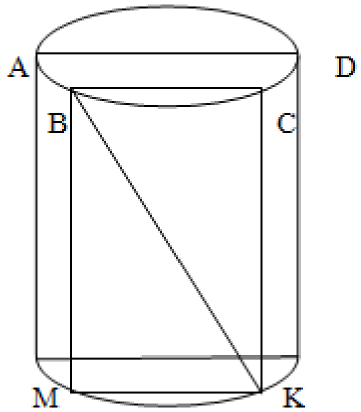
№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Вариант ответа	3	2	3	1,2	3	1	1	2	1	1

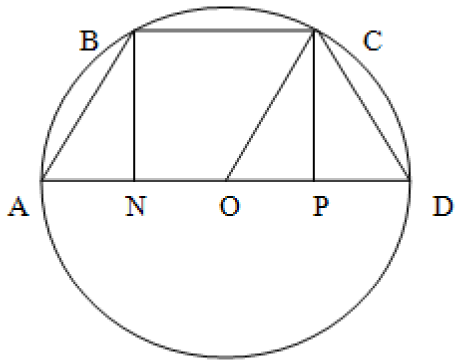
Самостоятельная работа:
Решите задачи:
№ 1.
Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см и образует с плоскостью нижнего основания угол 45 градусов. Найти радиус и высоту цилиндра.

Ответ: $R=H=\sqrt{72}$

№ 2.
В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, диагональ которого равна 17 см, высота цилиндра равна 15 см., а радиус основания 5 см. На каком расстоянии от оси проведено это сечение?

Примечание:
Рассмотрите, что собой представляет сечение цилиндра плоскостью. Найдите длину стороны МК.
Теперь, проведите сечение через основание цилиндра.
Рассмотрите получившуюся плоскость.
(это делать совершенно необязательно, сечение основания цилиндра проведено только для простоты понимания решения задачи).
Посмотрите на рисунок сечений сверху:





Найдите высоту трапеции, это и будет расстояние от проведенного по условию задачи сечения до оси цилиндра.

Ответ: Проведенное сечение цилиндра находится на расстоянии 3 см от его оси.

Конус

Значение темы:

«Конус» является одной из важнейших тем не только математики, физики, но и повседневной жизни современного человека. В окружающей нас природе существует множество объектов, являющихся физическими моделями указанной фигуры.

Одной из опорных форм в природе является конус. Он присутствует в конструктивном построении крон и стволов деревьев, стеблей и соцветий, грибов, раковин и пр. Архитекторы в своем творчестве нередко используют принцип конуса. Так, в конструкции Останкинской телебашни отчетливо виден конус.

При знакомстве с темой «Конус» развивается пространственное воображение, формируется логическое и критическое мышление, кругозор.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

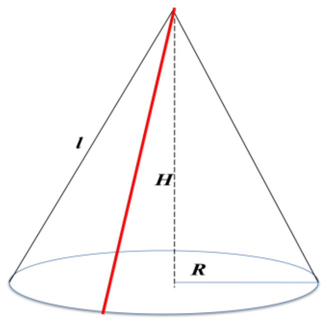
- определение конуса;
- виды сечений конуса плоскостями.

уметь:

- различать и показывать на моделях конус;
- изображать конус, осевые сечения конуса, выделяя их линейные элементы;

Краткое содержание темы:

Опр: *Конусом* называется тело, которое состоит из круга – основания конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга, - вершины конуса и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Отрезки называются образующими конуса.



Опр: Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярно плоскости основания.

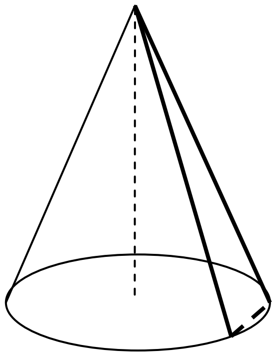
Опр: *Высотой* конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания.

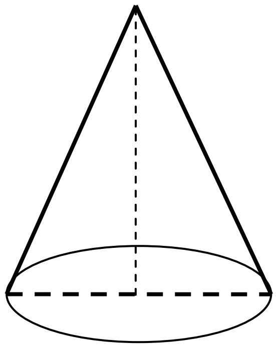
Осью прямого конуса называется прямая, содержащая его высоту.

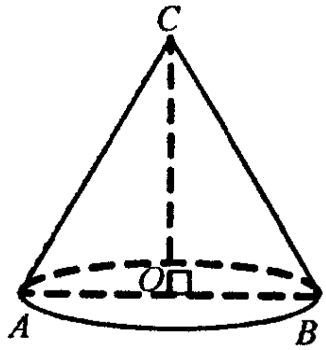
Опр: Часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания, называется *усеченным конусом*.

Сечение конуса плоскостями

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса. В частности, равнобедренным треугольником является осевое сечение конуса. Это сечение, которое проходит через ось конуса.







Пример: Радиус основания конуса 3 см, высота 4 см. Найдите образующую l.

Решение:

Из прямоугольного треугольника BOC по теореме Пифагора получим:

$l = BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ (см)

Ответ: 5 см

Вопросы для самоподготовки:

1. Какое тело вращения называется конусом? Назовите элементы конуса.
2. Какое тело называется усеченным цилиндром?
3. Какая фигура получается в результате сечения конуса плоскостью, параллельной оси?
4. Какая фигура получается в результате сечения конуса плоскостью, параллельной основанию?

Тест для самоконтроля:

1. Тело, состоящее из точки, круга и отрезков соединяющих их
   1) пирамида
   2) конус
   3) шар
   4) цилиндр
2. Боковая поверхность конуса состоит из
   1) образующих
   2) граней и ребер
   3) основания и ребра
   4) множества точек, удаленных на одинаковом расстоянии от центра

3. Фигура, при вращении которой образуется конус
   1) прямоугольник
   2) прямоугольный треугольник
   3) прямоугольная трапеция
4. Если высота конуса 15см, а радиус основания-8см, то образующая конуса равна
   1) 14 см
   2) 17 см
   3) 13см
   4) 6см
5. Элемент, не принадлежащий конусу
   1) образующая
   2) ось
   3) высота
   4) медиана
6. Если образующая конуса 5 см, а радиус основания-4 см, то высота конуса равна
   1) 9 см
   2) 1 см
   3) 3 см
   4) 10 см
7. В конусе с высотой 3,45 см и радиусом основания 6 см проведено сечение параллельно основанию на расстоянии 1,725 см от вершины. Радиус сечения.
   1) 3 см
   2) 9 см
   3) 1,725 см
   4) 6 см
8. Прямоугольный треугольник ABCс прямым углом C вращается вокруг прямой AC. Фигура получается при этом от вращения точки B
   1) окружность
   2) круг
   3) отрезок
   4) точка
9. Фигура, образующая при вращении усеченный конус
   1) прямоугольный треугольник
   2) прямоугольная трапеция
   3) прямоугольник
   4) равнобокая трапеция
10. Фигура, полученная при осевом сечении усеченного конуса
   1) прямоугольный треугольник
   2) прямоугольная трапеция
   3) прямоугольник
   4) равнобокая трапеция

Ключ для самоконтроля:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вариант ответа	2	1	2	2	4	3	1	1	2	4

Самостоятельная работа:

№ 1.

Высота конуса равна 5см, а радиус основания 12см. Найдите образующую конуса.

Ответ: 13 см.

№ 2.

Площадь основания конуса 36π см^2, а его образующая 10 см. Найдите высоту конуса.

Ответ: 8 см.

№ 3.

Образующая конуса равна 12 см. Угол между образующей и плоскостью основания равен 30 градусов. Найти радиус и высоту конуса.

Ответ: H=6 см, R= $6\sqrt{3}$ *см.*

Шар

Значение темы:

«Шар» является одной из важнейших тем не только математики, физики, но и повседневной жизни современного человека. В окружающей нас природе существует множество объектов, являющихся физическими моделями указанной фигуры.

Например, в невесомости капля принимает сферическую форму, планеты и атом имеют форму шара, некоторые растения имеют форму шара.

При знакомстве с темой «Шар» развивается пространственное воображение, формируется логическое и критическое мышление, кругозор.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать:

- определение шара;
- определение центра шара, сферы, диаметра шара, шарового сектора и сегмента.

уметь:

- различать сферу и шар;
- изображать сечения шара плоскостями, выделяя в них соответствующие линейные элементы

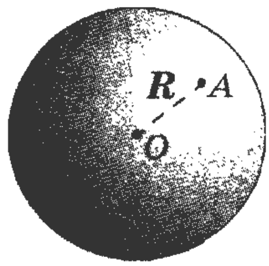
Краткое содержание темы:

Шар, сфера

Опр: *Сферой* называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра

Опр: Тело, ограниченное сферой, называется *шар*.



Опр: Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящей через центр шара, называется диаметром. Концы любого диаметра называются диаметрально противоположными точками шара.

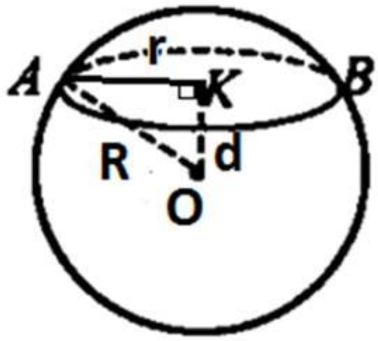
Сечение шара плоскостью

Теорема: Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Касательная плоскость к сфере.

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется *касательной плоскостью к сфере*, а их общая точка называется *точкой касания* плоскости и сферы.

Теорема 1: Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.
Теорема 2: Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.
Пример:
Шар радиуса 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.



Решение:
1. Так как, d<R, следовательно, сечением шара является круг. Чтобы найти площадь круга, сначала надо найти его радиус.
2. Рассмотрим треугольник АОК – прямоугольный. Найдем по т. Пифагора АК:

$$AK=\sqrt{AO^2-OK^2}=\sqrt{41^2-9^2}=40дм$$

3. Подставим значение радиуса в формулу площади круга:

$$S=\pi r^2=1600\pi$$

Ответ: 1600π дм^2.

Вопросы для самоподготовки:
1. Какое тело называется сферой? Шаром?
2. Какая фигура получается в результате сечения шара плоскостью?
3. Дайте определение плоскости, имеющей со сферой только одну общую точку. Каким свойством обладает касательная плоскость к сфере

Тест для самоконтроля:
1. Сечение сферы
   1) круг
   2) большая окружность
   3) малый круг
   4) малая окружность
2. Уравнение сферы, если точки находятся на расстоянии 2 см от начала координат.
   1) $x^2+y^2+z^2=4$
   2) $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$
   3) $(x-4)^2+(y+6)^2+(z-9)^2=4$
3. Форма тела, если его проекциями в горизонтальной и вертикальной плоскости являются круги
   1) шар
   2) цилиндр
   3) конус

4. Число точек касания касательной с шаром
   1) 1
   2) 2
   3) 3

5.Линия пересечения двух сфер есть
   1) круг
   2) полукруг
   3) окружность
   4) сечение

6.Количество окружностей большого круга проходящих через точку, принадлежащей сфере
   1) одну
   2) две
   3) четыре
   4) бесконечно много

7.Фигура пересечение двух больших окружностей сферы
   1) окружность
   2) прямая
   3) две точки
   4) отрезок

8.Радиус сферы, вписанной в куб с ребром 72 см.
   1) 72 см.
   2) 36 см.
   3) 18 см.
   4) 9 см.

9.Площадь сечения шара, радиусом 3,4 см плоскостью на расстоянии 1,6 см от центра
   1) $11{,}56\pi$ см^2
   2) 5π см^2
   3) 9π см^2
   4) 256π см^2

10.Радиус сферы, описанной около куба с ребром 36 см.
   1) $18\sqrt{3}$ см.
   2) $36\sqrt{3}$ см.
   3) $9\sqrt{3}$ см.
   4) $\sqrt{3}$ см.

11.Тело, состоящее из всех точек пространства, называется
   1) сферой
   2) шаром
   3) цилиндром
   4) полусферой

12.Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара

1) радиусом
2) центром
3) осью
4) диаметром.

13.Граница шара

1) сфера
2) шар
3) сечение
4) окружность

14.Сечение шара плоскостью есть

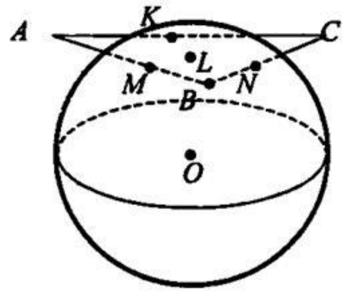
1) окружность
2) круг
3) сфера
4) полукруг

Ключ для самоконтроля:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Вариант ответа	2	1	1	1	3	4	3	2	3	1	1	4	1	2

Самостоятельная работа:

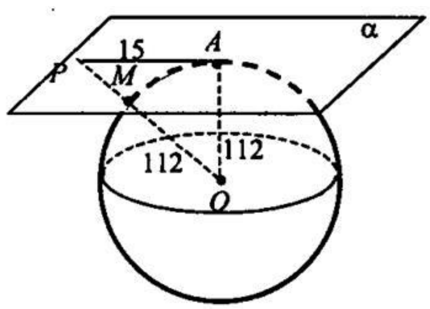
№ 1.



Стороны треугольника касаются сферы радиуса 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если его стороны равны 14 см, 14 см и 15 см.

Ответ: 3 см.

№ 2.



Радиус сферы равен 112 см. Точка, лежащая на плоскости, касательной к сфере, удалена от точки касания на 15 см. Найдите расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки сферы

Ответ: 1 см.

Объемы геометрических тел

Значение темы:

Первые ощущения объема мы получаем, когда берем в руки и ощупываем предметы или занимаемся лепкой. Форму объекта характеризуют длина, ширина и высота. Именно эти измерения делают его объемным.

Специалисты различных профессий сталкиваются с необходимостью вычислению объема геометрических фигур.

При знакомстве с темой «Объемы геометрических тел» развивается пространственное воображение, формируется логическое и критическое мышление, кругозор.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать*:*

- формулы объема многогранников и тел вращения

уметь*:*

- решение стереометрических задач на нахождение объемов многогранников и тел вращения

Краткое содержание темы

Опр: *Объем* – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1. Равные тела имеют равные объемы
2. Если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей.
3. Объем куба, ребро которого равно единицы длины, равен единице.

Формулы объемов геометрических тел:

Призма	Пирамида	Цилиндр	Конус	Шар
$V=S_{осн}*H$	$V=\frac{1}{3}S_{осн}*H$	$V=S_{осн}*H=\pi R^2*H$	$V=\frac{1}{3}S_{осн}*H=\frac{1}{3}\pi R^2*H$	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

Объем прямоугольного параллелепипеда с линейными размерами a,b,c вычисляется по формуле $V=abc$

Объем усеченной пирамиды: $V=\frac{1}{3}h\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)$

Объем усеченного конуса: $V=\frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right)$

Отношение площадей поверхностей и объемов подобных тел

Для подобных фигур на плоскости, имеющих площадь, верна теорема.

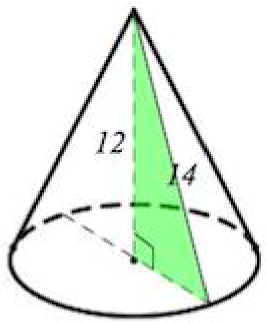
Теорема: Отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия. (Объемы двух подобных тел относятся как кубы их линейных размеров.)

Например: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}=\frac{R_1^3}{R_2^3}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3=k^3$, где к-коэффициент подобия

Пример: Высота конуса равна 12, образующая равна 14. Найдите его объем, деленный на π.

Решение:

Объем конуса вычисляется по формуле $V=\frac{1}{3}\pi R^2 * H$.



Находим радиус основания по т. Пифагора:

$R^2=14^2-12^2=52$

Тогда $V=\frac{1}{3}\pi$ 52*12=208 π

Откуда

$\frac{V}{\pi}=\frac{208\pi}{\pi}=208$

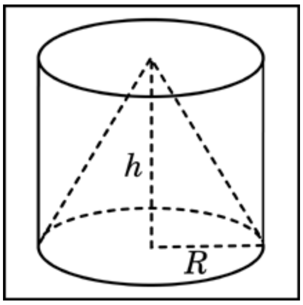
Ответ: 208.

Пример:

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 45 $см^3$.

Решение:

Объем цилиндра равен $V=S_{осн}*H$, а объем конуса с тем же радиусом основания и той же высотой равен $V=\frac{1}{3}S_{осн}*H$.



$\frac{V_ц}{V_к}=\frac{S_{осн}H}{\frac{1}{3}S_{осн}H}=3$, $V_к=\frac{V_ц}{3}=\frac{45}{3}=15$

Ответ: 15 $см^3$.

Вопросы для самоподготовки:

1. Дайте определение объема геометрического тела.
2. Поясните, как определить объем призмы, пирамиды?
3. Поясните, как определить объем цилиндра, конуса, шара?
4. Каким образом соотносятся между собой объемы подобных тел?

Тест для самоконтроля:

1.Объем правильной треугольной призмы с ребром *a*.

1) $a^3\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $a^3\frac{\sqrt{3}}{4}$

3) $6a^3$

4) $a^3\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Объем прямой призмы, имеющей высоту 3 см, служит трапеция с основаниями $4\frac{3}{4}$ см, $3\frac{1}{4}$ см и высотой $2\frac{2}{3}$ см.

1) 32 $см^3$
2) 33 $см^3$
3) 24 $см^3$
4) 36 $см^3$

3. Объем первого цилиндра с высотой 8 см, если объем второго цилиндра равен 4,5 $дм^3$ и высота 24 см, основания цилиндров равны

1) 1,5 $дм^3$
2) 1,5 $см^3$
3) 4,5 $см^3$
4) 4,5 $дм^3$

4.Объем равен правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и двугранным углом при основании 45^0

1) a^3
2) $\frac{a^3}{2}$
3) $\frac{a^3}{3}$
4) $\frac{a^3}{6}$

5. Объем правильной 4-х угольной призмы, у которой центр верхнего основания и середина сторон нижнего основания являются вершинами вписанной в призму пирамиды, объем призмы равен V

1) $\frac{V}{2}$
2) $\frac{V}{3}$
3) $\frac{V}{4}$
4) $\frac{V}{6}$

6.Объем конуса с образующей 6 см, который вписан в шар с площадью поверхности 64π $см^2$

1) $\frac{4}{3}\sqrt{3}\,см^3$
2) $\frac{189}{8}\,см^3$
3) $64\sqrt{3}\,см^3$
4) $\frac{16}{3}$ $см^3$

7.Объем тела вращения, образованного прямоугольным равнобедренным треугольником с гипотенузой c вращающегося вокруг прямой, проходящей через вершину прямого угла параллельно гипотенузе

1) $\frac{1}{12}c^3$

2) $\frac{1}{6}c^3$

3) $\frac{1}{4}c^3$

4) $\frac{1}{4}c^3$

8.Объем куба с ребром2а см

1) 3 a^3

2) 6 a^3

3) 8 a^3

4) $2a^2+2a$

9.Объем правильной треугольной призмы с ребром a

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$

2) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$

3) $6a^3$.

4) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$

10.Коэффициент подобия из отношений объема цилиндра к объему конуса

1) 3

2) $\frac{1}{3}$

3) $\frac{4}{3}$

4) 1

Ключ для самоконтроля:

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Вариант ответа	2	1	1	4	4	2	2	3	2	1

Площади поверхностей

Значение темы:

Вычисление площадей поверхностей пирамид, призм, цилиндров – задача более сложная, но стереометрия (геометрия трехмерного пространства) позволяет решить и ее. Боковые поверхности некоторых из этих тел (цилиндра, призмы, пирамиды и конуса) можно развернуть на плоскость, а других (сферы) – нельзя. При заданном объеме минимальной площадью поверхности обладает сфера. При заданном объеме минимальной площадью поверхности обладает сфера. (Мыльный пузырь в свободном пространстве принимает форму сферы.) Сферическая оболочка оказывает наибольшее сопротивление внутреннему давлению. Сферические емкости применяются для хранения жидкостей и газов под давлением и при низких температурах, так как при минимальной поверхности приток тепла извне сводится к минимуму. Самая экономичная форма, у шара самая малая поверхность, при самом большом объеме на его оболочку уходит меньше материала, чем на любую другую.

Со всеми этими знаниями вы познакомитесь более подробно при знакомстве с темой «Площади поверхностей», которая также способствует развитию пространственного воображения, формированию логического и критического мышления, кругозора.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать*:*

- Формулы площадей поверхности тел вращения

уметь*:*

- Решение стереометрических задач на нахождение площадей поверхности.

Краткое содержание темы:

Опр: *Площадь полной поверхности тел* – сумма площадей всех элементов, составляющих тело.

Свойства площади:

- Площадь единичного квадрата равна 1.
- Площадь аддитивна.
- Площадь неотрицательна.
- Площади конгруэнтных фигур равны.

Формулы площадей поверхности объемных тел

1.Призма

Боковой поверхностью призмы называется сумма площадей боковых граней.

Полная поверхность призмы равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

Теорема: Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, т.е на длину бокового ребра:

$$S = pl$$

2. Пирамида

Боковой поверхностью пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Теорема: Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему:

$$S = \frac{pl}{2}$$

Опр: Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофема*.

3. Цилиндр

Опр: Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра:

$$S_{бп} = 2\pi RH$$

Опр: Площадь полной поверхности цилиндра равна сумме площадей боковой поверхности и двух оснований:

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R)$$

4. Конус

Опр: Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половине длины окружности на длину образующей.

$$S_{бок.пов} = \frac{1}{2}Cl = \pi Rl$$

Опр: Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей боковой поверхности и основания.

$$S_{пол.пов.} = S_{бок.пов} + S_{осн} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$$

5. Шар

Опр: Полная поверхность шара рассчитывается по формуле:

$$S_{пол.пов} = 4\pi R^2$$

Пример:

№ 1.

Найти площадь полной поверхности правильной треугольной призмы, сторона основания которой6 см, а высота - 10 см.

Решение:

Полная поверхность призмы равна сумме боковой поверхности и площадей оснований $S_{п.п.}=2S_{осн}+S_{б.п.}$

В основании призмы находится правильный треугольник, следовательно площадь основания находится по формуле:

$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. По условию задачи а = 6 см откуда S = √3 / 4 * 36 = 9√3

Площадь каждой из граней боковой поверхности будет равна 6 * 10 = 60, а поскольку граней три, то 60 * 3 = 180.

Таким образом, площадь полной поверхности призмы будет равна $S_{п.п.}=2S_{осн}+S_{б.п.}=18\sqrt{3} +180 \approx 211,18$ см кв.

Ответ: $180 + 18\sqrt{3} \approx 211,18$

№ 2.

Площадь основания конуса 36π см^2, а его образующая 10 см. Вычислить боковую поверхность конуса.

Решение:

Боковую поверхность конуса находится по формуле: $S_{бок.пов} = \pi Rl$

Зная площадь основания, найдем его радиус:

$S = \pi R^2$

$36\pi = \pi R^2$

$R^2 = 36$

$R = 6$

Площадь боковой поверхности конуса найдем по формуле: $S_{б.п.} = \pi * 6 * 10 = 60\pi$

Ответ: 60π см^2 .

Вопросы для самоподготовки:

1. Дайте определение площади.
2. Как найти площадь полной поверхности многогранников?
3. По какой формуле вычисляется площадь полной и боковой поверхности цилиндра?
4. По какой формуле вычисляется площадь полной и боковой поверхности конуса?
5. По какой формуле вычисляется площадь полной поверхности шара?

Тест для самоконтроля:

1.Площадь поверхности правильной 6-угольной призмы, у которой все ребра равны 1

1) 6
2) $6\sqrt{3}$
3) $3(\sqrt{3}+2)$
4) $6\sqrt{3}+1$

2.Площадь поверхности правильной шестиугольной пирамиде, у которой все ребра равны b

1) $3b^2$
2) $6b^2$
3) $3\sqrt{3}\,b^2$
4) $6\sqrt{3}\,b^2$

3.Площадь боковой поверхности равностороннего цилиндра при условии, что площадь полной поверхности равна 2,4 м^2

1) 1,2 м^2
2) 1,6 м^2
3) 1,8 м^2
4) 3,2 м^2

4.Площадь боковой поверхности конуса, радиус основания которого равен 2,5 см, образующая 8 см

1) 20 см^2
2) 10см^2
3) 16 см^2
4) 20 см^2

5. Площадь полной поверхности полушара с радиусом 7 дм

1) 49 дм^2
2) 98 дм^2
3) 147 дм^2
4) 196 дм^2

6. Площадь поверхности шара, в который вписан цилиндр с радиусом основания a и высотой в 4 раза больше радиуса

1) $4a^2$
2) $5a^2$
3) $20a^2$
4) $\frac{20}{3}a^2$

7. Площадь поверхности шара, который вписан в равносторонний конус, зная, что образующая конуса равна 2 см

1) 16 см^2
2) $\frac{4}{3}$ см^2
3) $\frac{16}{3}$ см^2
4) $4\sqrt{3}$ см^2

8.Площадь поверхности тела вращения, которое образовано равносторонним треугольником, который вращается вокруг прямой, на которой лежит одна из его сторон, зная, что площадь данного треугольника равна Q

1) $Q\sqrt{3}$ см^2
2) $2Q\sqrt{3}$ см^2
3) $4Q$см^2
4) $\frac{1}{4}Q$см^2

Ключ для самоконтроля:

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Вариант ответа	3	3	3	2	3	2	2	3

Координаты в пространстве

Значение темы:

Общаясь друг с другом, люди часто говорят: "Оставьте свои координаты". Для чего?....Чтобы человека было легко найти. Это могут быть: номер телефона, домашний адрес, место работы, E-mail. Суть координат или системы координат состоит в том, что это правило, по которому определяется положение объекта. Системы координат окружают нас повсюду: система географических координат (широта - параллели и долгота - меридианы); с помощью координатной сетки летчики, моряки определяют местоположение объектов; применяются на туристических схемах для поиска достопримечательности или нужной улицы; при астрономических наблюдениях координатная сетка накладывается на небесный свод с Землей в центре.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

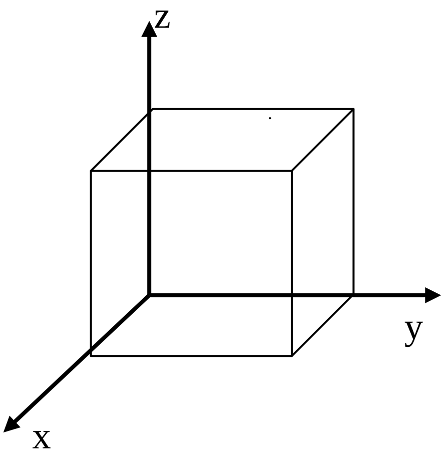
знать*:*

- формула нахождения расстояния между точками через их координаты;
- формула нахождения координат середины отрезка;

уметь*:*

- находить расстояние между точками и координаты середины отрезка;
- изображать точки в декартовой системе координат;
- использовать координаты при решении математических и прикладных задач.

Краткое содержание темы



Система координат в пространстве:
три взаимно перпендикулярные прямые:
x, y, z, пересекающиеся в одной точке.
O – начало отсчета,
x, y, z – координатные оси,
xy, yz, xy – координатные плоскости.

Расстояние между точками: $A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Координаты середины отрезка: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z=\frac{z_1+z_2}{2}$

Уравнения прямой, плоскости и сферы

Уравнение прямой, проходящей через две заданные несовпадающие точки A1 (x1, y1, z1), A2 (x2, y2, z2):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору **N** = (A, B, C) имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

В декартовой системе координат *уравнение сферы* радиуса R с центром C (x0, y0, z0) имеет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

Пример: Найдите расстояние между точками $A_1(4;3;-1)$ и $A_2(0;2;4)$

$$A_1A_2=\sqrt{(0-4)^2+(2-3)^2+(4+1)^2}=\sqrt{16+1+25}=\sqrt{42}$$

Пример: Координаты середины отрезка AB, если A (4; -2; 1), B(3; 0; 5)

$$X=\frac{4+3}{2}=3{,}5 \quad ; \quad Y=\frac{-2+0}{2}=-2 \quad ; \quad Z=\frac{1+5}{2}=3$$

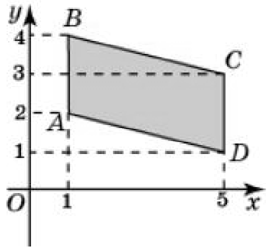
Вопросы для самоподготовки:

1. Дайте определение всем составляющим декартовой системы координат в пространстве.
2. Как найти расстояние между точками через их координаты, нахождение координат середины отрезка.
3. Чему равны уравнения прямой, плоскости и сферы.
4. Постройте точку A (4,3,5)
5. Где располагаются точки M(1,0,2), K (0,2,3), N (0,0,4)?

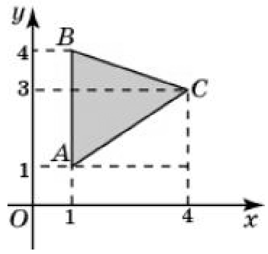
Тест для самоконтроля:

1. Координаты середины отрезка MN, если концы отрезка – точки M(2;-6) и N(4; 0)
   1) (6;-6)
   2) (2;6)
   3) (3;-3)
   4) (3;3)
2. Расстояние между точками K(0;7) и P(8;1)
   1) 10
   2) 8
   3) $\sqrt{128}$
   4) 98

3. Вид уравнения окружности с центром в точке (-6;1) и радиусом 9
   1) $(x-6)^2+(y+1)^2=9$
   2) (x+6)2+(y−1)2=81
   3) $(x+6)^2+(y-1)^2=81$
   4) $(x+6)^2+(y-1)^2=3$
4. Вид уравнения прямой, проходящей через точку (-20; 5) и параллельной оси ординат
   1) y – 5 = 0
   2) y + 5 = 0
   3) x - 20 = 0
   4) x + 20 = 0
   5) -20x + 5y =0
5. Площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты{1, 2}, {1, 4}, {5, 3}, {5, 1}



   1) 8
   2) 9
   3) 10
   4) 11
6. Площадь треугольника, вершины которого имеют координаты {1, 1}, {1, 4}, {4, 3}



   1) 4,5
   2) 5,5
   3) 6,6
   4) 7,2
7. Координаты точки А, если точка К-середина отрезка АВ, координаты В(0;0;2) и К(-12;4;15)
   1) А(-24;8;28)
   2) А(24;-8;-28)
   3) А(-24;-8;-28)
   4) А(24;8;28)
8. Точка симметричная М (2;-3;-4), относительно плоскости (XOY)
   1) M_1(-2;-3;-4)
   2) M_1(-2;3;4)
   3) M_1(2;-3;4)
   4) M_1(-2;-3;4)
9. Расстояние от В(-2;5; $\sqrt{3}$) до оси OZ
   1) $\sqrt{31}$
   2) 5
   3) $\sqrt{29}$
   4) 4,8

Ключ для самоконтроля:

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Вариант ответа	3	1	3	4	1	1	1	3	3

Векторы в пространстве

Значение темы:

Вектор – одно из основных геометрических понятий. Он характеризуется числом (длиной) и направлением. Наглядно он представляется в виде направленного отрезка. Многие физические величины являются векторными (характеризуются абсолютной величиной и направлением). Перемещение, скорость, время, ускорение, сила, давление, пройденный путь.

Тема «Векторы в пространстве» является одной из основных тем раздела «Стереометрия», а также имеет практическое применение в физике и других прикладных науках, в том числе и медицине.

На основе теоретических знаний и практических умений обучающийся должен

знать*:*

– действия над векторами в пространстве.

уметь*:*

- выполнять с векторами действия сложения, умножения на число, скалярного произведения векторов;
- находить угол между векторами, скалярное произведение векторов.
- использовать вектора при решении математических и прикладных задач.

Краткое содержание темы

Опр: Отрезок, у которого указаны начало и конец, называется направленным отрезком или *вектором*.

Опр: *Координатами* вектора с началом в т. $A_1(X_1,Y_1,Z_1)$ и концом в т. $A_2(X_2,Y_2,Z_2)$ называются числа X_2-X_1, Y_2-Y_1, Z_2-Z_1.

Длина (модуль) вектора **a** - это длина отображающего его отрезка AB, обозначается | **a** |.

Нулевой вектор 0 или 0 - это вектор, у которого начальная и конечная точки совпадают, т.е. А = В. Отсюда, 0 = – 0.

Опр: Два вектора называются *равными*, если они сонаправленные и имеют равные модули.

Действия над векторами

1) Суммой векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{в}(в_1, в_2, в_3)$ называется вектор $\vec{C} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
2) Произведением вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ на число α называется вектор $\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$

Разложение вектора по направлениям

Опр: Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они параллельны в широком смысле.

Теорема: Для того чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были бы *коллинеарные* необходимо и достаточно, чтобы $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ (k - скаляр).

Опр: Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются *компланарными*, если они параллельны некоторой плоскости в широком смысле.

Теорема: Чтобы три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были бы *компланарны*, необходимо и достаточно, чтобы один из них является линейной комбинацией двух других $\vec{c} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b}$ (k, l - скаляры).

Теорема: Если дана упорядоченная тройка векторов $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ некомпланарных векторов, то для любого вектора $\vec{p}$ существует единственная упорядоченная тройка чисел (x; y; z), удовлетворяющая равенству $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Т.е. в пространстве вектор $\vec{p}$ разлагается на три некомпланарных вектора.

Скалярное произведение векторов. Угол между двумя векторами.

Теорема: Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Следствие 1: Ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Следствие 2: Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Проекция вектора на ось

Проекцией v_x вектора $\vec{v}$ на ось x называется длина его составляющей по этой оси, взятая со знаком “+”, если направление вектора $\vec{v}$ совпадает с направлением оси, и со знаком “–” в противном случае. Заметим, что проекция вектора на ось равна длине этого вектора умноженной на косинус угла между вектором и осью. ($v_x=|v|\cos\alpha$)

При разложении вектора на составляющие вдоль осей координат в декартовой системе координат вводится понятие *координат вектора* как коэффициентов разложения: если $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$, то вектор $\vec{v}$ имеет координаты $\vec{v}(v_x; v_y)$.

Пример: Даны четыре точки A (2; 7; -3), B (1; 0; 3), C (-3; -4; 5), D (-2; 3;1). Укажите среди векторов $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{DC}, \overline{AD}, \overline{AC}, \overline{BD}$ равные векторы.

Даны четыре точки А (2; 7; -3), В (1; О; 3), С (-3; -4; 5), D (-2; 3; -1). Укажите среди векторов равные векторы.

Решение: Надо найти координаты указанных векторов $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{DC}, \overline{AD}, \overline{AC}, \overline{BD}$ и сравнить соответствующие координаты. У равных векторов соответствующие координаты равны. Например, у вектора $\overline{AB}$ координаты: 1-2=-1, 0-7 = -1, 3 - (-3)=6.

У вектора $\overline{DC}$ такие же координаты: - 3-(-2)=-1, -4-3= -7, 5-(-1) = 6.

Таким образом, векторы и равны. Другой парой равных векторов будут $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$.

Вопросы для самоподготовки:

1. Дайте определение вектора, координаты вектора, модуля вектора, равенства векторов.
2. Как сложить вектора, умножить вектор на число? Какие действия над векторами можно еще совершать?
3. Каким образом можно разложить вектор в пространстве?
4. Чему равно скалярное произведение векторов, угол между двумя векторами.
5. Как построить проекцию вектора на ось? Чему равна проекция вектора на ось?

Тест для самоконтроля:

1. Координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{b} + \vec{a}$, где $\vec{a}\{-2; 3\}$, $b\{1;4\}$
   1) {0;11}
   2) {-1;7}
   3) {-4;-5}
   4) {-3;10}
2. Координаты вектора АВ с координатами точек А{1;3}, В{0; 2}
   1) {1;5}
   2) {-1;-1}
   3) {1;1}
   4) {-1;1}
3. Длина вектора $\vec{a}$\{-4; 3\} равна
   1) 1;
   2) 7;
   3) $\sqrt{5}$
   4) 5
4. Векторы a(2;-1;3) и b(1;3;**n**) перпендикулярны, **n** равно
   1) $\frac{1}{3}$
   2) $\frac{1}{2}$
   3) -$\frac{1}{3}$
   4) -1

5.Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{1;2;2\}$ и $\vec{b}\{0;-2;2\}$
1) -1
2) 0
3) 1
4) -9

6.Угол между векторами $\vec{a}\{1;2;2\}$ и $\vec{b}\{0;-2;2\}$
1) 0^0
2) 270^0
3) 90^0
4) 45^0

7.Условие перпендикулярности векторов
1) $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$
2) $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 1$
3) $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = 0$
4) $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = 1$

8. Угол между коллинеарными векторами равен
1) 0^0
2) 270^0
3) 90^0
4) 45^0

Ключ для самоконтроля:

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Вариант ответа	1	1	3	4	2	3	1	1

Задания для самоподготовки к итоговым занятиям по дисциплине «Математика»

Перечень вопросов для подготовки к зачетной работе

1. Сформулируйте группу аксиом стереометрии.
2. Объясните, через какие фигуры пространства можно провести плоскость и притом только одну.
3. Объясните взаимное расположение прямых в пространстве.
4. Объясните взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
5. Объясните взаимное расположение плоскостей в пространстве.
6. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах и обратную к ней.
7. Объясните, как найти расстояние между скрещивающимися прямыми.
8. Объясните, как определяются координаты точки в пространстве. Выразите расстояние между двумя точками через координаты этих точек.
9. Объясните, как определяются координаты точки в пространстве. Выведите формулы для координат середины отрезка через координаты его концов.
10. Дайте определение координат вектора, действий над векторами (сложение, умножения на число, скалярное произведение)
11. Дайте определение угла между скрещивающимися прямыми
12. Дайте определение угла между плоскостями
13. Какие векторы в пространстве называются коллинеарными, компланарными?
14. Дайте определение угла между прямой и плоскостью?
15. Дайте определение многогранника. Приведите примеры выпуклого и невыпуклого многогранника? Приведите примеры правильного многогранника.
16. Дайте определение призме. Сделайте чертеж. Назовите элементы призмы (основание, высоту, боковые ребра и грани)
17. Дайте определение параллелепипеду. Сделайте чертеж. Как найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если известны три его измерения?
18. Дайте определение пирамиде. Сделайте чертеж. Назовите элементы пирамиды (основание, боковые ребра и грани, высоту, вершину)
19. Дайте определение цилиндру. Сделайте чертеж. Покажите элементы цилиндра (основание, высоту, образующую, ось симметрии, радиус). При вращении какой плоской фигуры можно получить прямой цилиндр?
20. Дайте определение конуса. Сделайте чертеж. Назовите элементы конуса (основание, высота, ось симметрии, радиус, образующая). При вращении какой плоской фигуры можно получить конус?
21. Расскажите о сечении плоскостями цилиндра, конуса, шара.
22. Дайте определение шара, шарового сегмента и сектора.
23. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема прямоугольного параллелепипеда.

24. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема наклонного параллелепипеда.
25. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема n-угольной призмы.
26. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема пирамиды.
27. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема усеченной пирамиды.
28. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема цилиндра.
29. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема конуса
30. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема усеченного конуса.
31. Дайте определение объема. Приведите формулу нахождения объема шара.
32. Выведите формулу нахождения площади боковой и полной поверхности цилиндра.
33. Выведите формулу нахождения площади боковой и полной поверхности конуса.

Примерные зачетные задачи

1. Основание пирамиды DABC - прямоугольный треугольник с катетами 2 см и 3 см. Высота DA равна 4 см. Площадь боковой грани DBC равна 12 $см^2$. Вычислить площадь боковой и полной поверхности пирамиды.

2. Основание цилиндра - окружность длиной 6π м, диагональ цилиндра наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Вычислить площадь боковой и полной поверхности, объем цилиндра.

3. Основание конуса - окружность радиусом 3 м, образующая конуса равна 6 м. Вычислить площадь боковой и полной поверхности, объем конуса.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Исследовательская работа «Роль математики в жизни человека»

В науке и жизни без математики – никуда!

Иога́нн Карл Фри́дрих Га́усс

Объект исследования: Математика, как наука и учебная дисциплина.
Предмет исследования: Роль математики в жизни человека, общества.
Цель работы: Рассмотреть вопросы отношения к математике в прошлые века, и в современном мире.
Задачи:

1. Изучить вопросы, влияния изучения математики на интеллектуальные способности человека, на его мышление, память и другие качества личности;
2. Изучить некоторые проблемы, связанные с изучением математики в колледже;
3. Познакомиться с взаимодействием математики с современными науками: медицина, биология, химия, искусственный интеллект и др.

Методы исследования: теоретический анализ, анализ статистических данных, полученных в результате проведения опроса учащихся колледжа.

Требования к оформлению

Исследовательская работа подготавливается по нескольким источникам и сопровождается наглядной презентацией, которая должна содержать:

- теоретический материал;
- формулы;
- практические примеры и практическое применение математики.

Презентация оформляется в едином стиле, строго в соответствии с планом.
План презентации:

- Титульный слайд (Наименование учреждения, Общая тема исследовательской работы, индивидуальная тема работы, авторы работы, руководитель, город, год)
- Введение (объект, предмет, цель работы, задачи, методы исследования)
- Теоретическая часть (теоретический анализ выбранной темы)
- Практическая часть (в зависимости от темы исследования подборка примеров, проведение опроса)
- Заключение (выводы)

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : учеб.для общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын [и др.] ; ред. А. Н. Колмогоров. - 20-е изд. - М. : Просвещение, 2011. – 384с.
2. Погорелов, А. В.Геометрия. 10–11 классы : учеб.для общеобразоват. учреждений / А.В.Погорелов. – М.: Просвещение, 2010.- 175 с.

Дополнительная литература

3. Омельченко, В. П. Математика : учеб.пособие / В. П. Омельченко, Э. В. Курбатова. - 7-е изд. - Ростов н/Д : Феникс, 2013. - 380 с.
4. Луканкин, А. Г. Математика : учеб.для учащихся учреждений сред. проф. образования [Электронный ресурс] / А. Г. Луканкин. - М. : ГЭОТАР-Медиа, 2014. - 320 с. – Режим доступа : http://www.medcollegelib.ru/book/ISBN9785970430941.html.
5. Павлушков, И. В. Математика : учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М. : ГЭОТАР-Медиа, 2013. - 319 с.

Электронные ресурсы

1. ЭБС КрасГМУColibris;
2. ЭБС Консультант студента;
3. ЭБС ibooks.