



Случайные величины и их законы распределения.

лекция № 8 для студентов 1 курса,
обучающихся по специальности 37.05.01—

Клиническая психология

© Составитель: доцент кафедры
медицинской и биологической физики,
к. ф.-м. н. Романова Н.Ю.

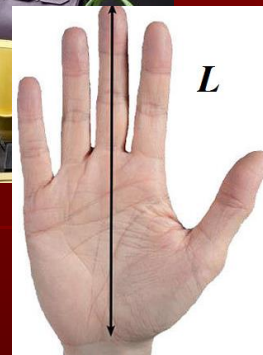
План:

- Понятие, классификация случайных величин.
- Дискретная случайная величина (ДСВ). Закон распределения ДСВ. Условие нормировки. Функция распределения ДСВ.
- Числовые характеристики ДСВ и их свойства.
- Плотность распределения и функция распределения непрерывной случайной величины и их связь. Условие нормировки для НСВ.
- Расчет вероятности попадания НСВ в заданный интервал.
- Числовые характеристики непрерывного распределения.

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее — какое именно.



Случайная
величина



ДСВ

Дискретного
типа

Непрерывного
типа

НСВ

Возможные значения дискретных величин могут быть заранее перечислены.

Возможные значения непрерывных величин не могут быть заранее перечислены и непрерывно заполняют некоторый промежуток.

Примеры дискретных случайных величин:

- число появлений герба при трех бросаниях монеты (возможные значения 0, 1, 2, 3);
- число особей, обладающих определенным признаком (выражается целым числом);
- число зерен в колосе и т. п.

Примеры непрерывных случайных величин:

- расстояние от точки попадания до центра мишени;
- ошибка в измерении расстояния;
- Концентрация вредных веществ в воздухе и т.п.



Законом распределения случайной величины X называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и соответствующими им вероятностями $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ – для дискретной. Или: $x - p(x)$ – для непрерывной

Закон распределения случайной величины может задаваться в виде:

- таблицы
- графика
- формулы (аналитически).

Способы задания закона распределения дискретной случайной величины.

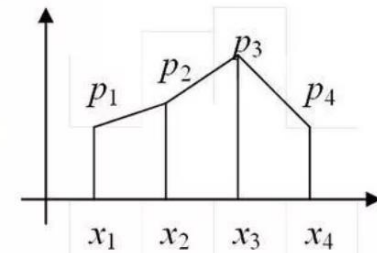
Таблично:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Аналитически: $p(x_i) = f(i), \quad i = 1, 2, \dots, n$

Графически:



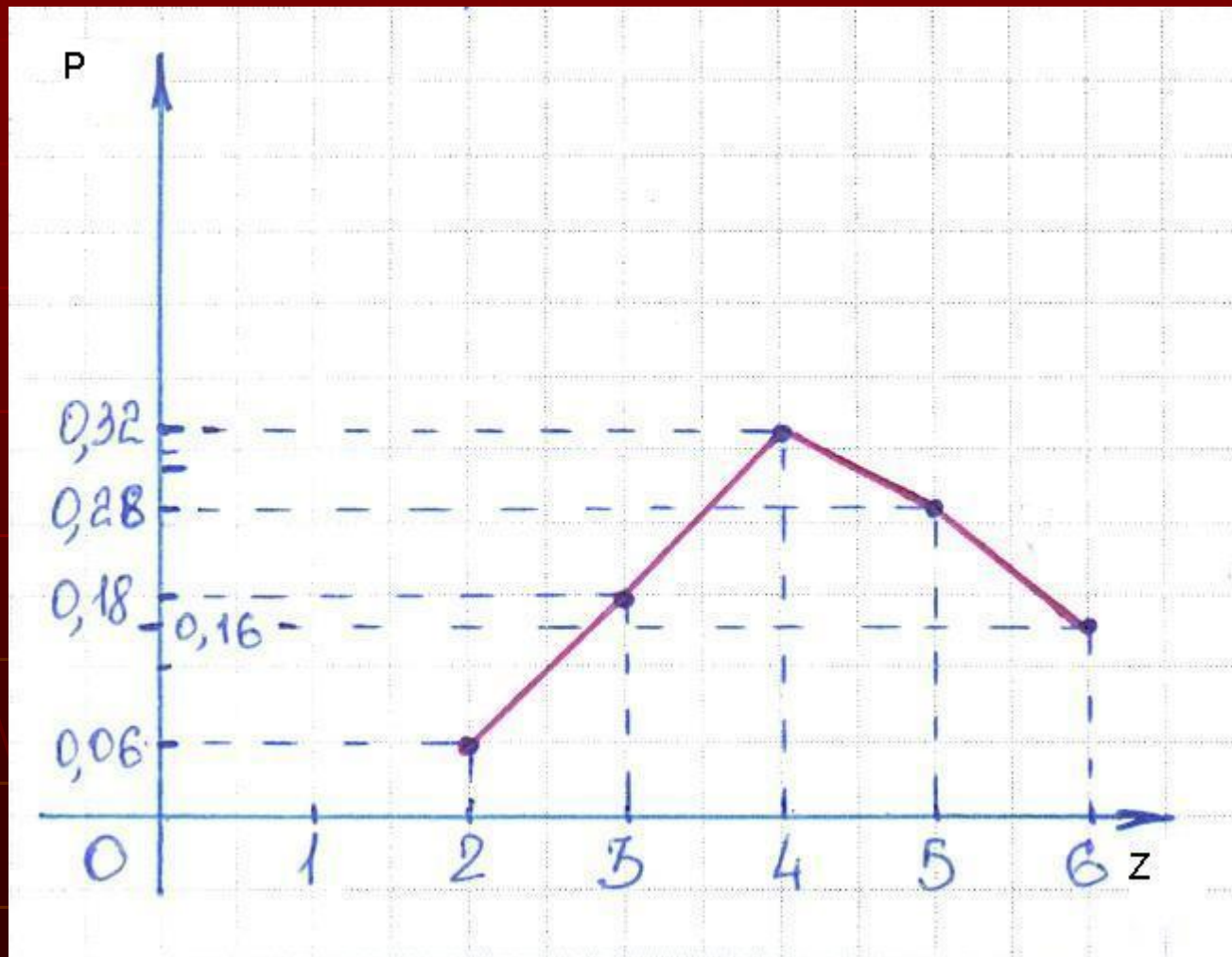
Простейшей формой задания этого закона является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности:

X_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

При этом:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad - \text{условие нормировки}$$

«Многоугольник распределения»- зависимость p_i от x_i :



Пример. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб. и десять выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины X — стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Напишем возможные значения X : $x_1 = 50$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Вероятности этих возможных значений таковы: $p_1 = 0,01$, $p_2 = 0,1$, $p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 0,89$. Напишем искомый закон распределения:

X	50	10	0
p	0,01	0,1	0,89

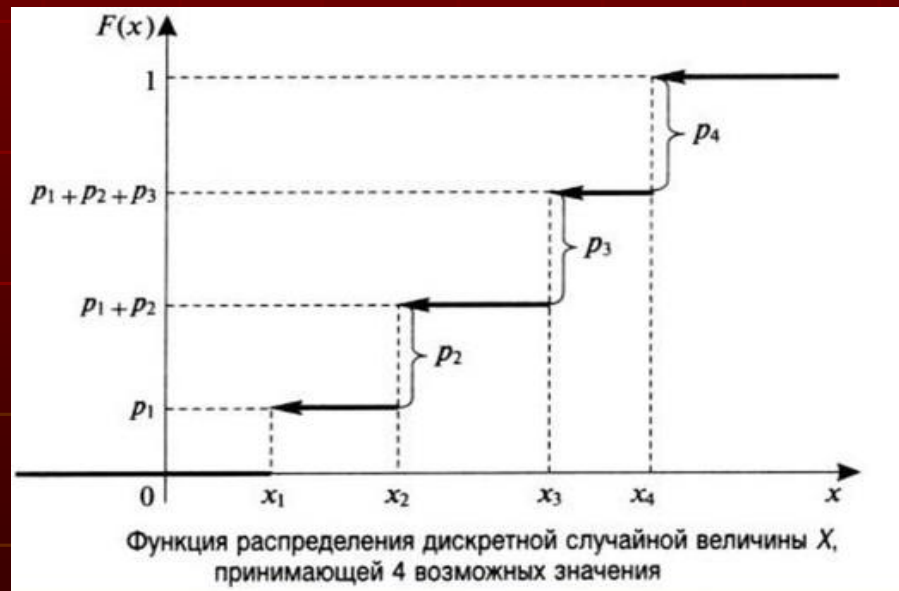
Контроль: $0,01 + 0,1 + 0,89 = 1$.



Функция распределения дискретной случайной величины

$$F(x) = P(X < x) \quad \text{- неубывающая!}$$

эта функция равна вероятности того, что СВ приняла значения, меньшие x .



$$0 \leq F(x) \leq 1$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

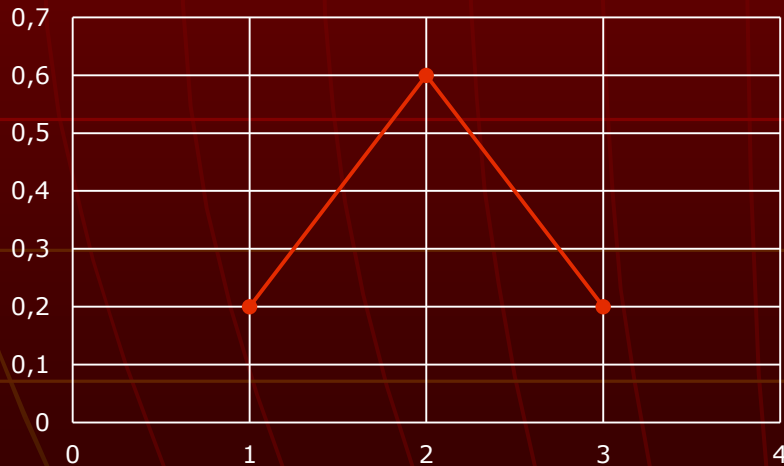
Задан ЗР:

X	2	4	8
P	1/5	3/5	1/5

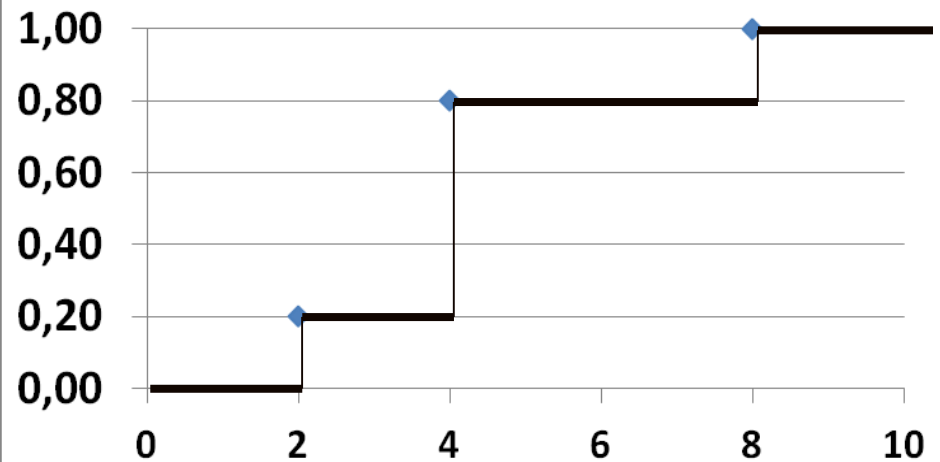
Найдем $F(x)$:

X	<2	2-4	4-8	≥ 8
P(X)	0	$1/5=0,2$	$3/5=0,6$	$1/5=0,2$
F(X)	0	0,2	$0,2+0,6=0,8$	$0,8+0,2=1$

Многоугольник распределения

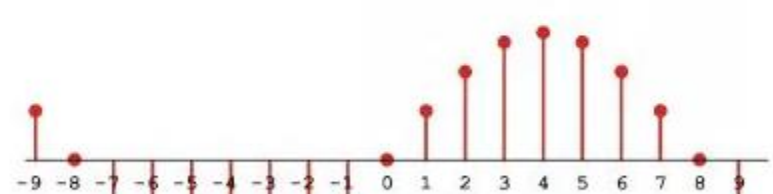
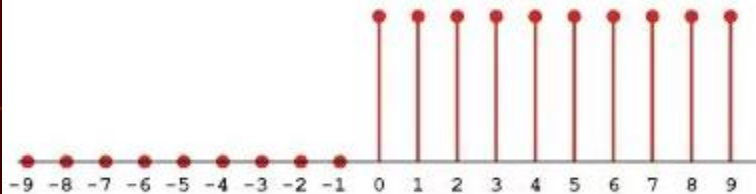
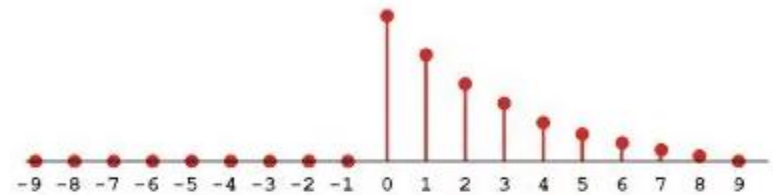
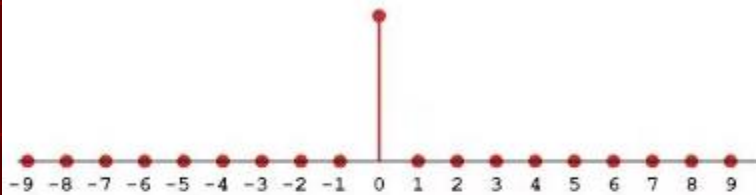


F(X)





Некоторые известные «дискретные» распределения



Геометрическое распределение

Данное распределение соответствует задачам следующего вида: производится ряд независимых опытов, которые продолжаются до первого появления события A . Случайная величина — число проведенных опытов. При этом считается, что вероятность появления события A в одном опыте равна p . Тогда закон распределения вероятностей описывается следующей формулой:

$$P(X = m) = (1 - p)^{m-1} p$$

X=m	1	2	3	...
P_i	p	qp	q ² p	

Пример. Производится стрельба по цели до ее поражения. Вероятность поразить цель одним выстрелом равна 0.4. Требуется вычислить:

- а) вероятность поражения цели третьим выстрелом;
- б) вероятность поражения цели одним из первых пяти выстрелов.

Решение. Закон распределения вероятностей поражения цели n -м выстрелом ($X = n$) удовлетворяет геометрическому закону распределения:

X	1	2	3	4	5	...
p_i	0,4	$0,4 \cdot 0,6$	$0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6$	$0,4 \cdot 0,6^3$	$0,4 \cdot 0,6^4$	



Таким образом, решение первой части задачи находится из условия $p = 0.4, m = 3$:

$$P(X = 3) = (0.6)^{3-1} \cdot 0.4 = 0.144.$$

Событие A – поражение цели с пяти выстрелов не что иное, как сумма пяти событий: поражения цели 1-м, 2-м, ..., 5-м выстрелами. Так как все эти события несовместны, то вероятность A удовлетворяет правилу сложения вероятностей в следующей форме:

$$P(A) = \sum_{i=1}^5 P(X = i) = 0.4 \cdot (1 + 0.6 + 0.6^2 + 0.6^3 + 0.6^4) = 0.922.$$

Гипергеометрическая схема

В корзине 6 шаров, из которых 4 белых и 2 черных. Вытаскивается 3 шара. Случайной величиной X является число вытащенных белых шаров. Записать закон распределения этой случайной величины, изобразить многоугольник распределения, записать функцию распределения и нарисовать ее график.

Решение:

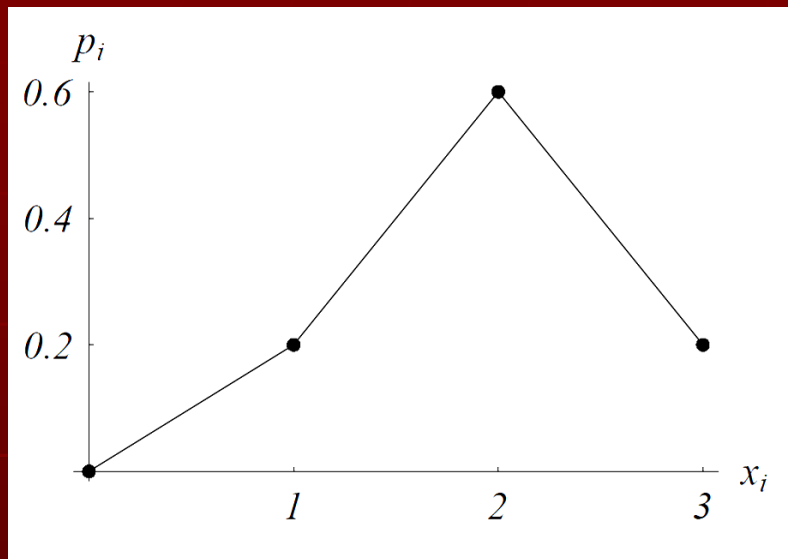
$$p_1 = \mathbf{P}(X=1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}$$

$$p_1 = \mathbf{P}(X=2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}$$

$$p_1 = \mathbf{P}(X=3) = \frac{C_4^3 C_2^0}{C_6^3} = \frac{1}{5}$$

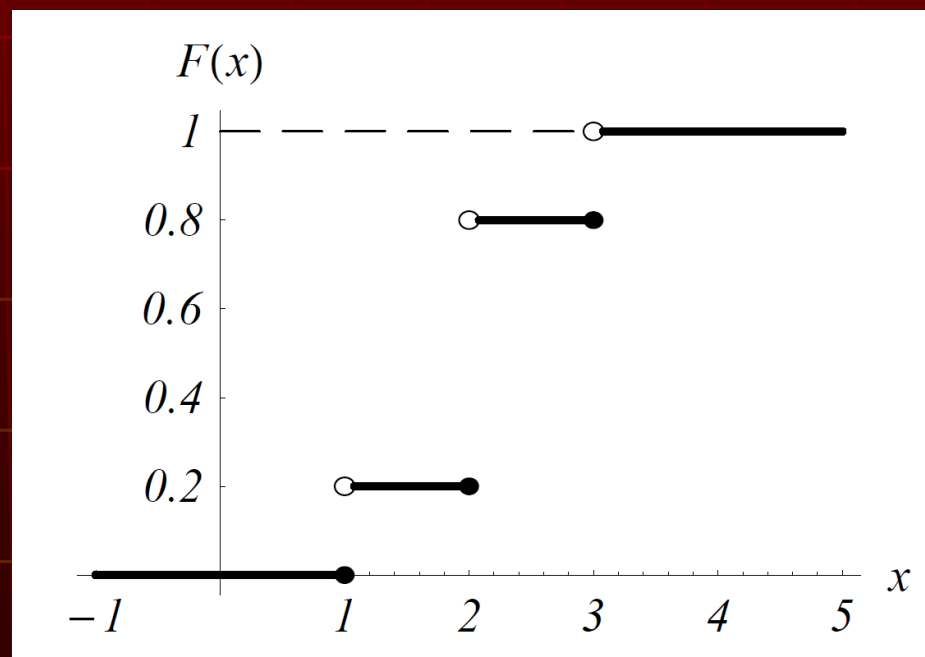
x_i	0	1	2	3
p_i	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Многоугольник распределения



x_i	0	1	2	3
p_i	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Функция
распределения



Биномиальное распределение

«схема Бернулли».

$P_n(k) = P(\text{событие } A \text{ наступило } k \text{ раз в } n \text{ испытаниях}).$

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$



где C_n^k — число сочетаний по k элементов из n , или биномиальный коэффициент.

x_i	0	1	2	...	m	...	n
p_i	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Биномиальное распределение. Пример.

Монета брошена 5 раз. Задать распределение случайной величины X – числа выпадения «гербов» аналитически, таблично и графически.

Решение. $n=5$, $X=0,1,2,\dots,5$ (всего 6 возможных значений).

Аналитически: $P(X = X_i) = C_5^{X_i} * 0,5^{X_i}(1 - 0,5)^{5-X_i}, i = \overline{1,6}$

Таблично: $i=1, X_i=0. P_5(0) = C_5^0 * 0,5^0(1 - 0,5)^{5-0} = \frac{5!}{0!5!} * 1 * 0,5^5 = 0,03125$

$i=2, X_i=1. P_5(1) = C_5^1 * 0,5^1(1 - 0,5)^{5-1} = \frac{5!}{1!4!} * 0,5 * 0,5^4 = 0,15625$

$i=3, X_i=2. P_5(2) = C_5^2 * 0,5^2(1 - 0,5)^{5-2} = \frac{5!}{2!3!} * 0,5^2 * 0,5^3 = 0,3125$

$i=4, X_i=3. P_5(3) = C_5^3 * 0,5^3(1 - 0,5)^{5-3} = \frac{5!}{3!2!} * 0,5^3 * 0,5^2 = 0,3125$

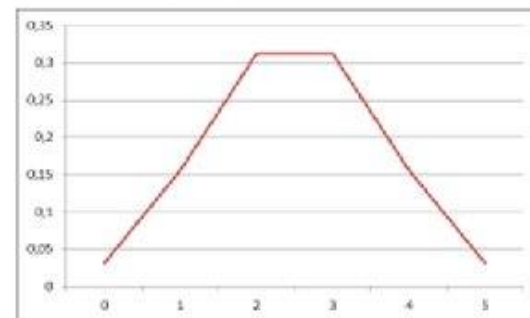
$i=5, X_i=4. P_5(4) = C_5^4 * 0,5^4(1 - 0,5)^{5-4} = \frac{5!}{4!1!} * 0,5^4 * 0,5^1 = 0,15625$

$i=6, X_i=5. P_5(5) = C_5^5 * 0,5^5(1 - 0,5)^{5-5} = \frac{5!}{5!0!} * 0,5^5 * 0,5^0 = 0,03125$

$$\sum P_5(i) = 1$$

X	0	1	2	3	4	5
P	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Графически:



Распределение Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}; \lambda = np$$



Числовые характеристики распределения



Во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать случайную величину полностью.

Зачастую достаточно бывает указать только отдельные числовые параметры:

- какое-то **среднее значение**, около которого группируются возможные значения случайной величины;
-
- какое-либо число, характеризующее **степень разбросанности** этих значений относительно среднего и т.п.

Среди большого количества таких числовых характеристик, применяемых в теории вероятности и математической статистике, мы рассмотрим две наиболее важные, а именно, **математическое ожидание** и **дисперсию**.

Математическое ожидание иногда называют просто *средним значением* случайной величины.

Математическим ожиданием *дискретной* случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$\begin{aligned} M(X) &= \sum_{i=1}^k x_i p_i = \\ &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n \end{aligned}$$

Пример:

X_i	2	4	8
P_i	$1/5$	$3/5$	$1/5$
$X_i \cdot P_i$	$2 \cdot 1/5$	$4 \cdot 3/5$	$8 \cdot 1/5$
$M(X) = \sum X_i \cdot P_i$	$22/5 = 4,4$		

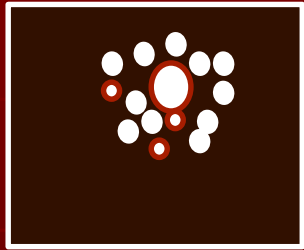
- **Математическое ожидание** – это средневзвешенное значение случайной величины с весами в виде вероятностей.
- **Математическое ожидание** – это тот теоретический центр, вокруг которого располагаются все возможные значения случайной величины.

МАМА РАЗРЕШИЛА СИДЕТЬ В КОМПЬЮТЕРЕ	
Ожидание	Реальность
24 ЧАСА	10 МИНУТ

- это не то...

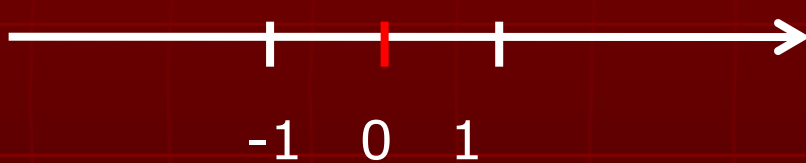
Математическое ожидание уже не является случайной величиной. Это постоянная величина для данного распределения СВ. Является обобщенной характеристикой данного распределения, указывая то значение, около которого в основном располагаются все возможные значения, принимаемые этой случайной величиной.

Пусть заданы две случайные величины с такими законами распределений



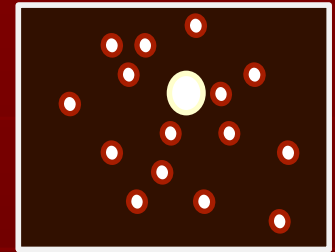
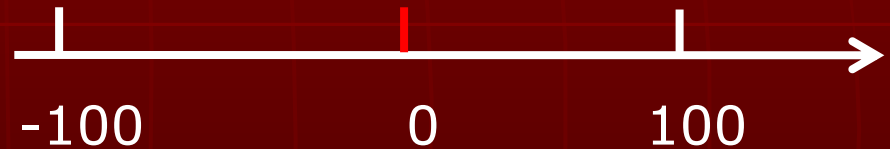
X	-1	1
P	0.5	0.5

$$M(X)=0$$



Y	-100	100
P	0.5	0.5

$$M(Y)=0$$



Для обеих случайных величин математические ожидания одинаковые и равны нулю, однако разброс значений вокруг мат. ожиданий в одном случае маленький, а в другом случае большой.

Для того, чтобы оценить степень рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания, вводят новую характеристику — **дисперсию** (рассеяние) СВ.

Дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией случайной величины X называют число $D(X)$, равное математическому ожиданию (среднему) случайной величины $(X - M(X))^2$, т.е.

$$D(X) = M \left((X - M(X))^2 \right)$$

На практике часто используется следующая формула для вычисления дисперсии:

$$D(X) = M \left(X^2 \right) - (M(X))^2$$

Дисперсия случайной величины есть характеристика рассеивания, т.е. разбросанности значений случайной величины около ее математического ожидания.

1. Рассматриваются **квадраты** отклонений, а не сами отклонения, ибо даже при больших отклонениях положительные и отрицательные отклонения могут компенсировать друг друга.
2. Дисперсия всегда **больше нуля**. Она равна нулю лишь для неслучайных величин, т.е. для констант.
3. Дисперсия, так же как и математическое ожидание, является **неслучайной** величиной (т.е. константой) для данного конкретного распределения.

Сама дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины.

Для наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины.

Для этого из дисперсии извлекают квадратный корень. Полученная величина носит название ***среднеквадратическое отклонение:***

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Наш пример:

X	50	10	0
p	0,01	0,1	0,89

$$M(x) = 50 \cdot 0,01 + 10 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,89 = 1,5$$

X_i	50	10	0
P_i	0,01	0,1	0,89
X_i^2	2500	100	0
$M(x^2) = \sum X_i^2 \cdot P_i$	$2500 \cdot 0,01$	$100 \cdot 0,1$	$0 \cdot 0,89$

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x) = (25 + 10) - (1,5)^2 \approx 32,75$$

$$\sigma(x) = \sqrt{32,75} \approx 5,72$$

В следующей таблице приведены выражения для математических ожиданий, дисперсий и среднеквадратических отклонений некоторых рассмотренных нами распределений:

Распределение	$P(X)$ или $p(x)$	$M(X)$	$D(X)$	$\sigma(X)$
Геометрическое	$P(X = m) = (1 - p)^{m-1} p$	$1/p$	$\frac{(1-p)}{p^2}$	$\sqrt{\frac{(1-p)}{p}}$
Биномиальное	$P(X = m) = C_a^m p^m (1-p)^{n-m}$	np	$np(1-p)$	$\sqrt{np(1-p)}$
Пуассона	$P(X = m) = a^m e^{-a} / m!$	a	a	$\sqrt{a}$

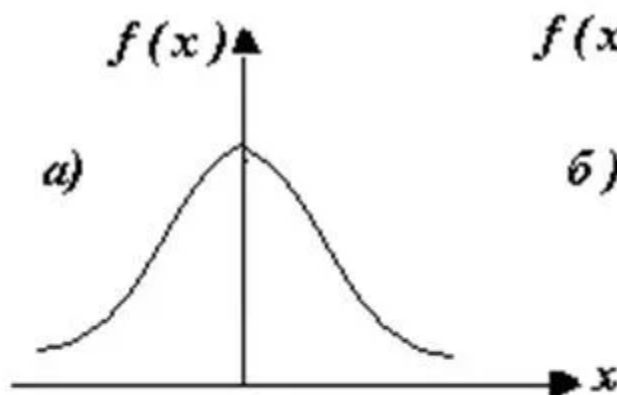


Промежуточный контроль

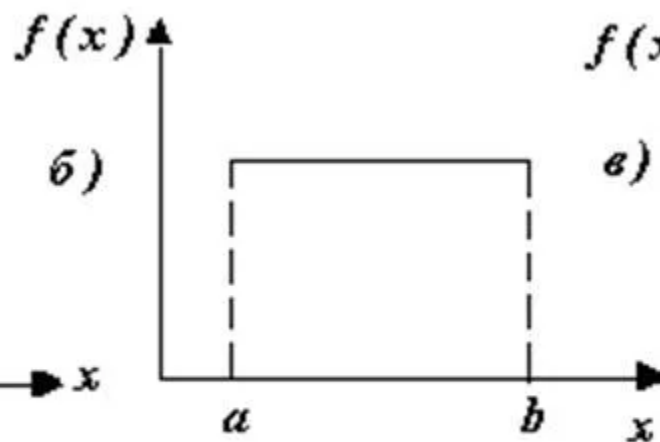
- Что называется непрерывной случайной величиной? Приведите примеры.
- Какими числовыми характеристиками характеризуется случайная величина?



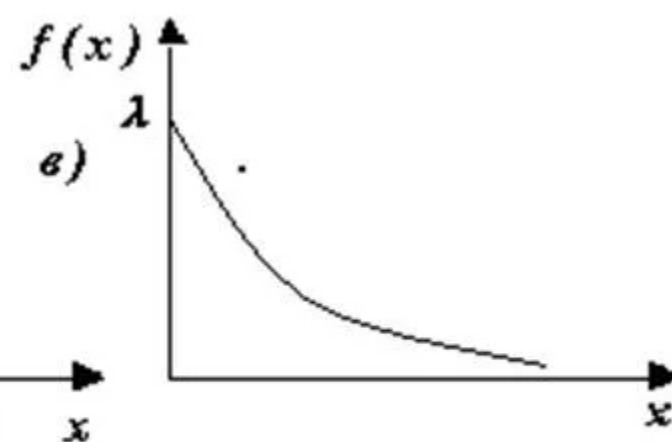
Законы распределения непрерывных случайных величин



Нормальное
распределение



Равномерное
распределение



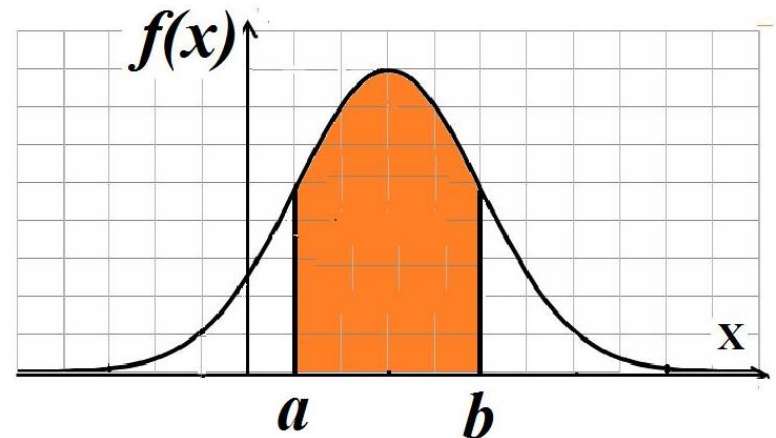
Показательное
распределение

Для непрерывной случайной величины имеет смысл рассматривать только такое событие, как **попадание в интервал (x_1, x_2) , а не попадание в отдельную точку**. Так как вероятность попадания непрерывной случайной величины в любую заранее заданную точку равна нулю. Будем обозначать эту вероятность через

$$P(x_1 < X < x_2)$$

Она может быть представлена в виде интеграла от некоторой функции $f(x)$ — **плотности распределения вероятностей**.

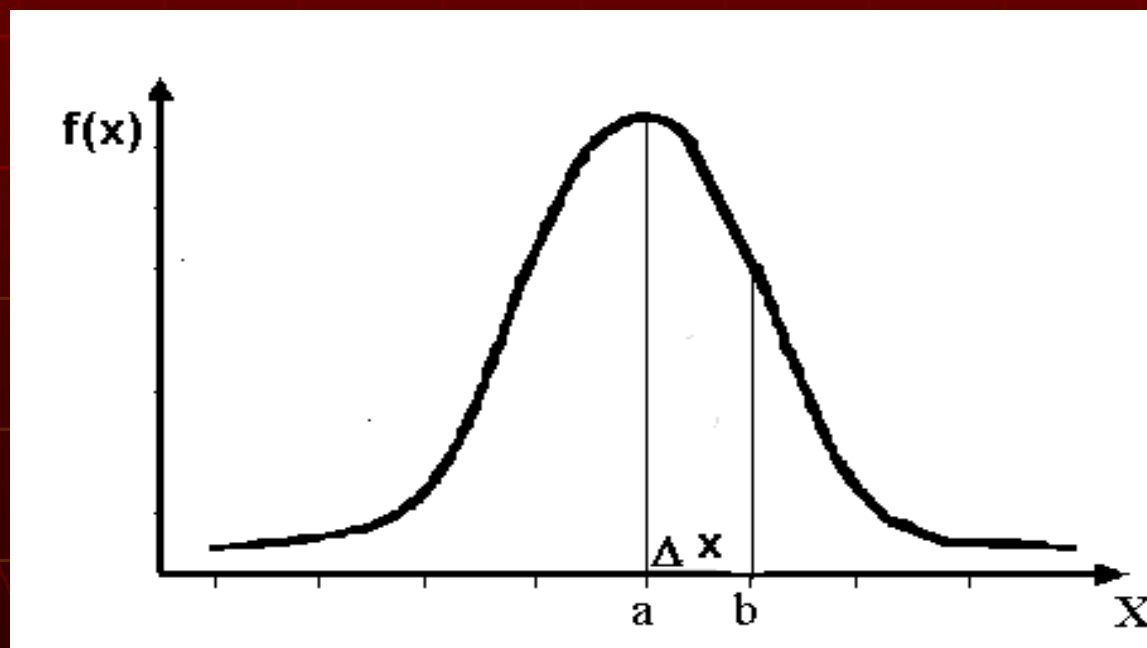
Вероятность попадания значений случайной величины в интервал $[a, b]$



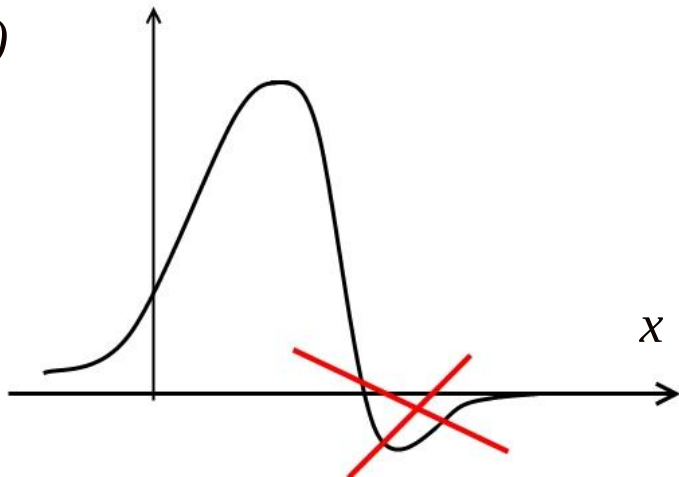
При этом функция плотности вероятности должна быть нормирована условием:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

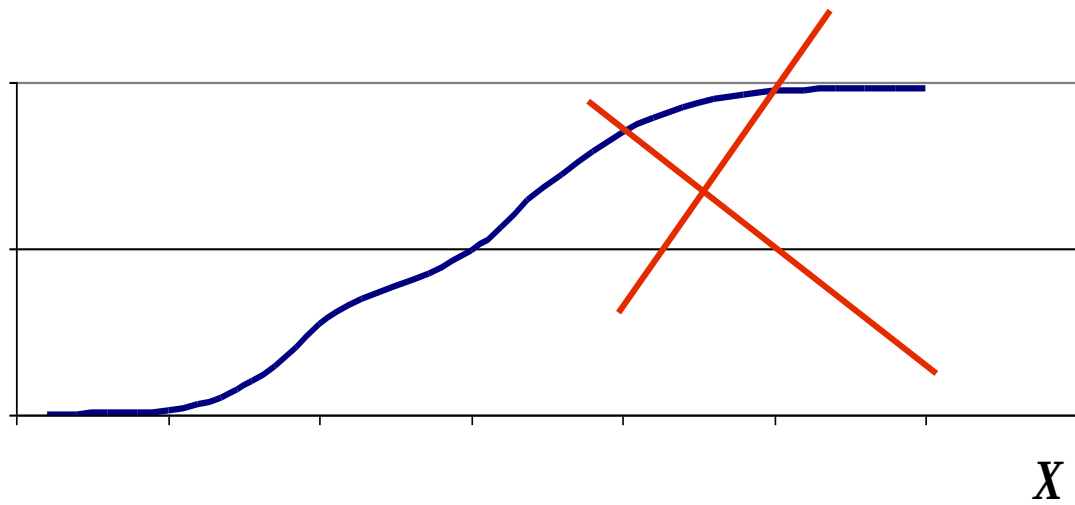
и быть неотрицательной.



$f(x)$



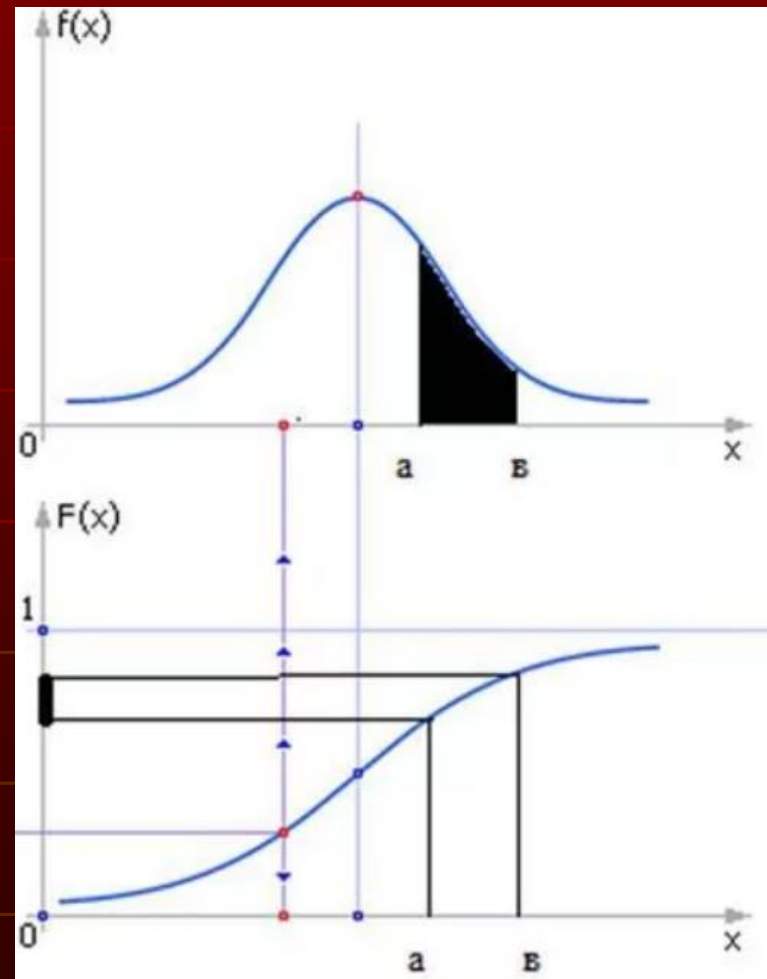
$f(X)$

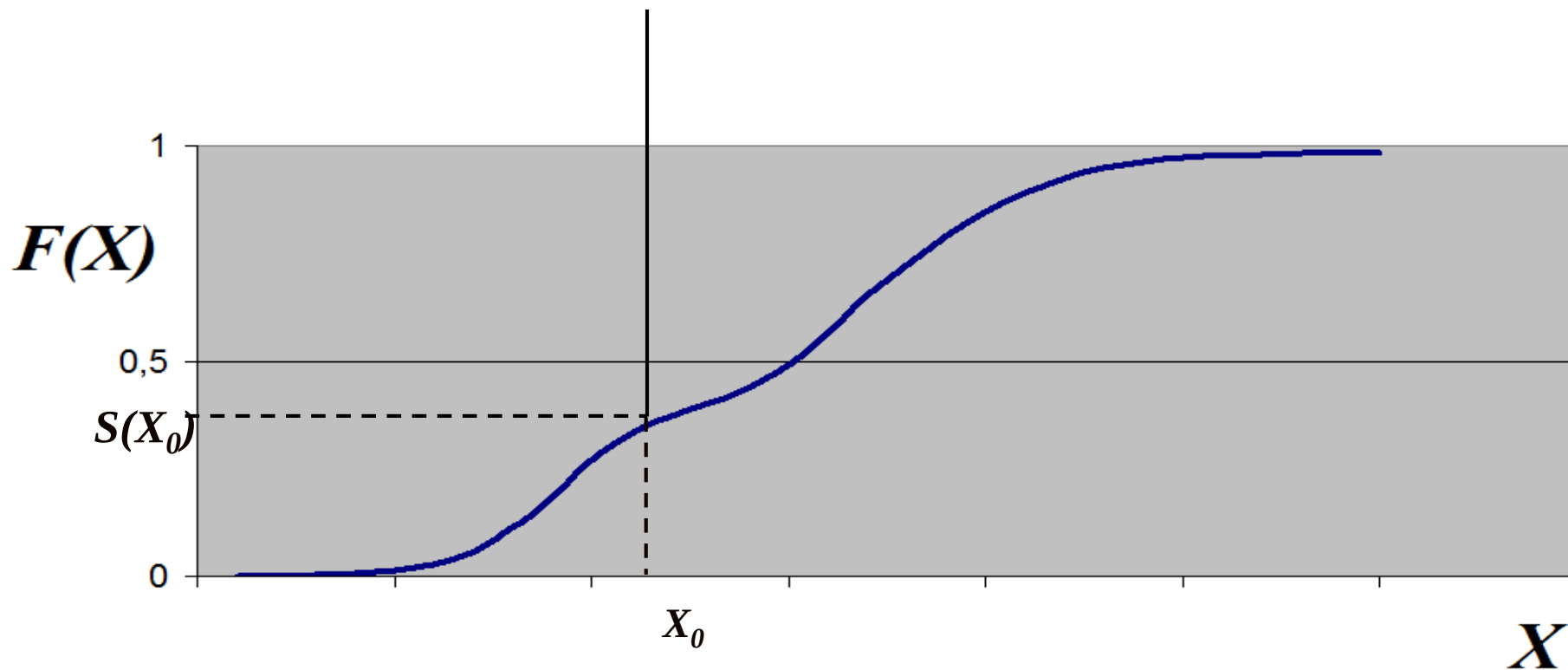
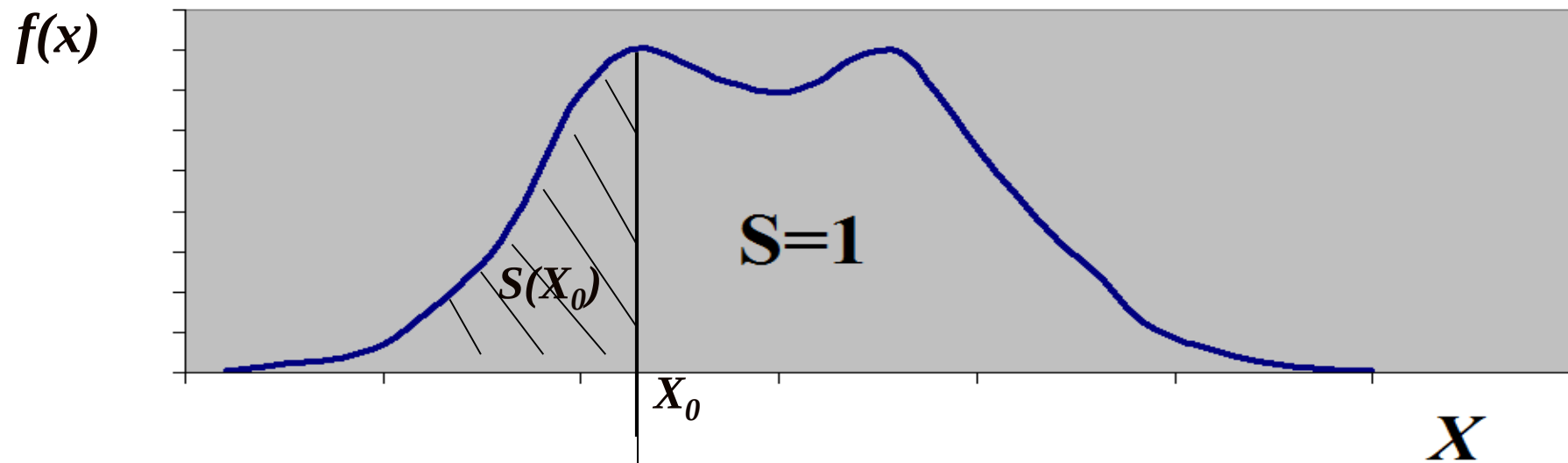


При этом интегральная функция $F(X)$ называется *функцией распределения вероятности* случайной величины и определяется как

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

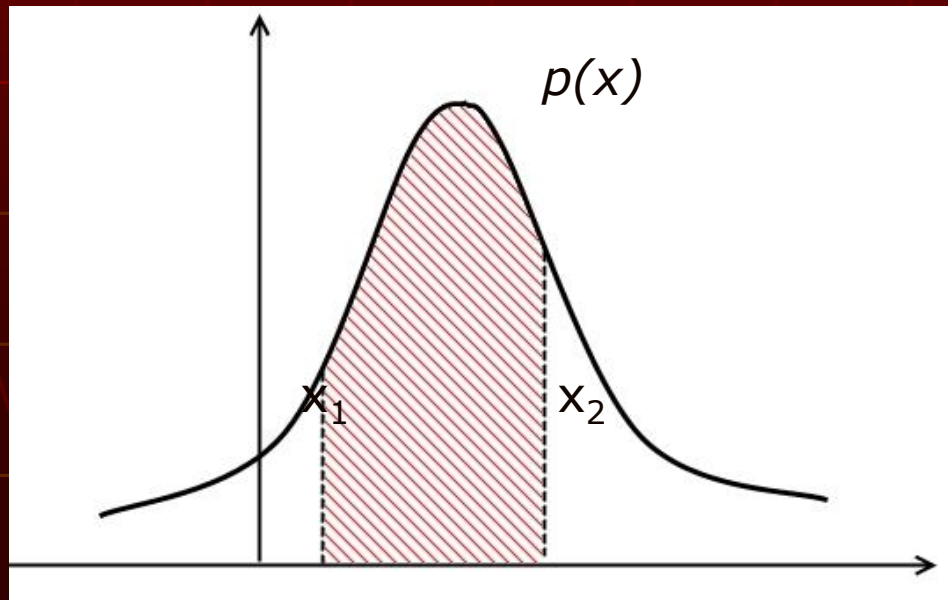
Она, как уже говорилось ранее, имеет смысл «накопленной вероятности».





Тогда вероятность попадания величины X в интервал от X_1 до X_2 равна:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \\ = F(x_2) - F(x_1)$$



Пример: Задана функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \frac{cx^2}{4} & \text{при } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти: а) значение c , б) функцию плотности распределения вероятностей $f(X)$, в) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;1)$. Построить графики функций $F(X)$ и $f(X)$.

Решение.

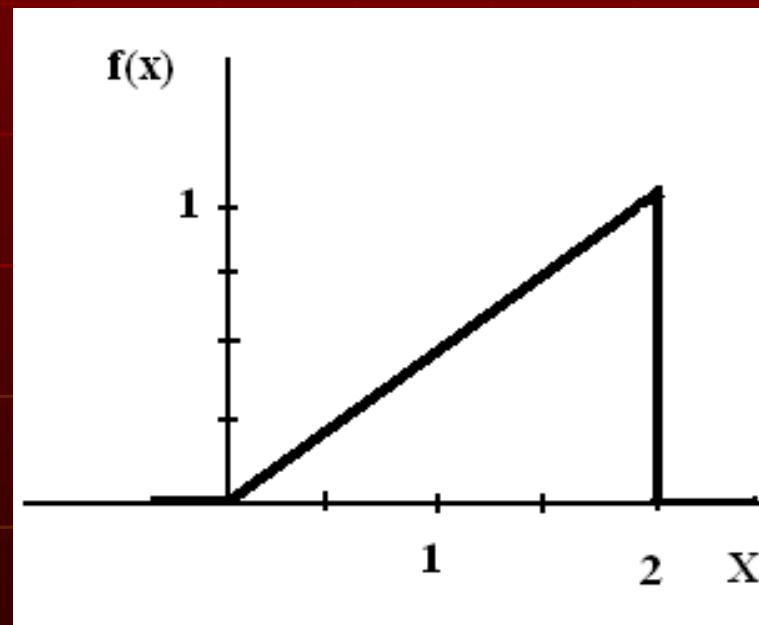
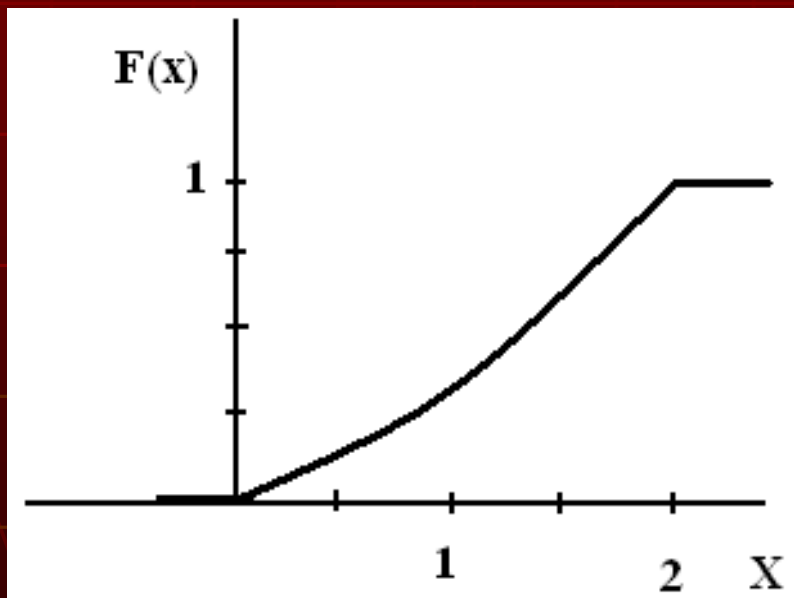
Найдем C из условия нормировки:

$$\frac{c \cdot x^2}{4} = 1 \text{ при } x=2 \quad \frac{c \cdot 2^2}{4} = 1, \\ \text{следовательно } c=1$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \left(\frac{x^2}{4}\right)' = \frac{x}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;1)$

$$F(1) - F(0) = \frac{1 \cdot 1^2}{4} - \frac{1 \cdot 0^2}{4} = \frac{1}{4}$$



Числовые характеристики непрерывного распределения:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx.$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 \cdot f(x) dx$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{x}{2} dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx + \int_2^{\infty} x \cdot 0 dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

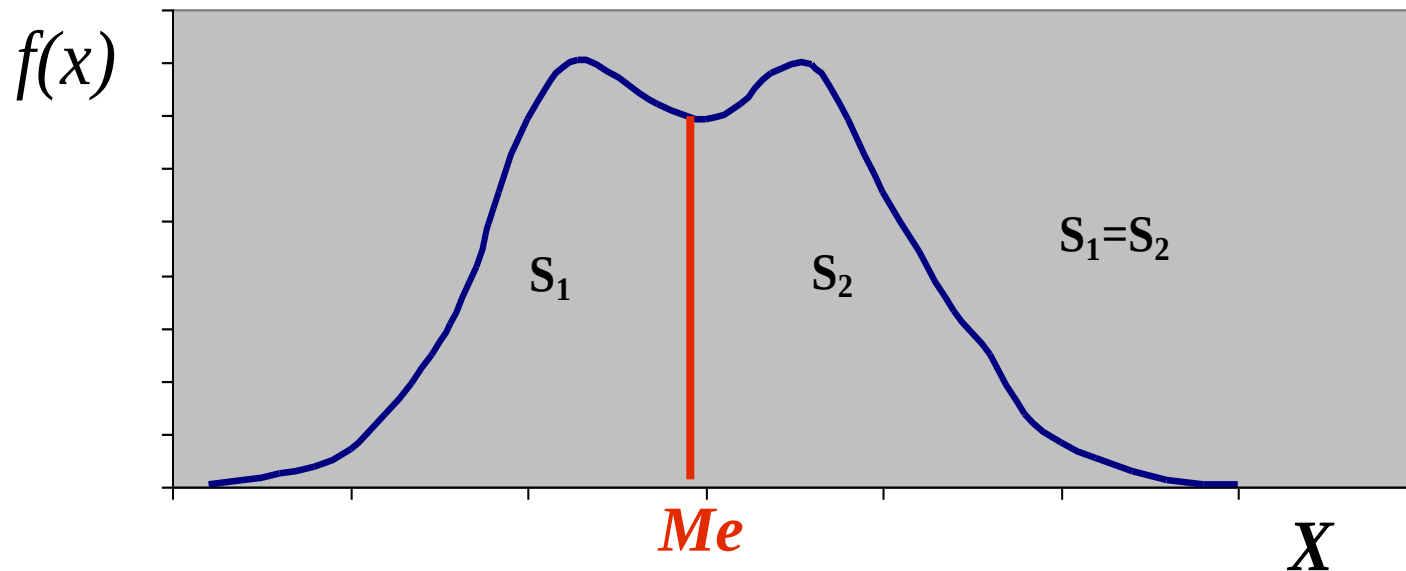
$$D(x) = \int_0^2 \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 \cdot \frac{x}{2} dx = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} \right) \cdot \frac{x}{2} dx =$$

$$\int_0^2 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{9}x \right) dx = \frac{2^4}{8} - \frac{4 \cdot 2^3}{9} + \frac{4 \cdot 2^2}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = 0,47$$

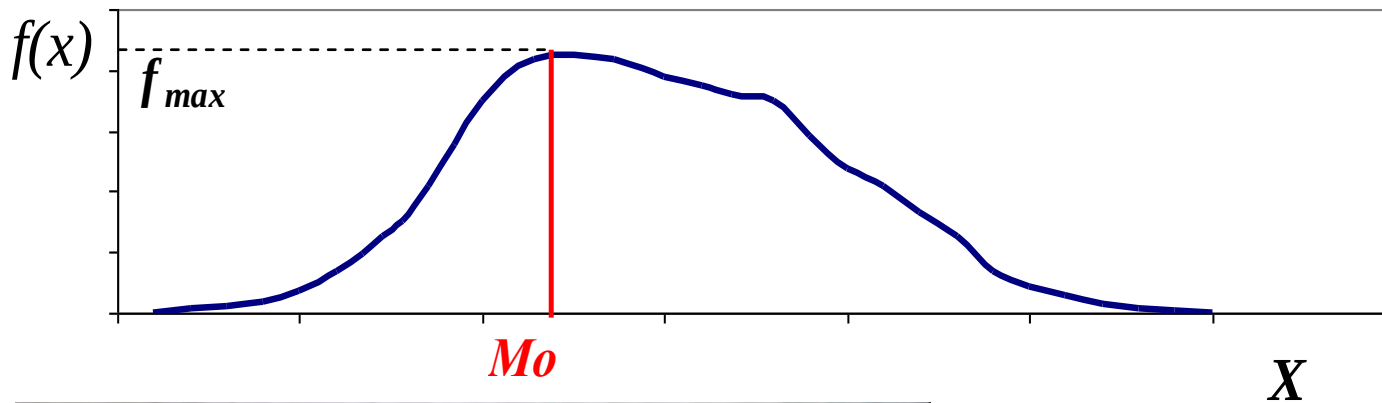
Медиана - Me - абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная графиком функции плотности вероятности делится пополам (0,5-квантиль):

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{\infty} f(x)dx = 0,5$$



Мода случайной величины - M_o

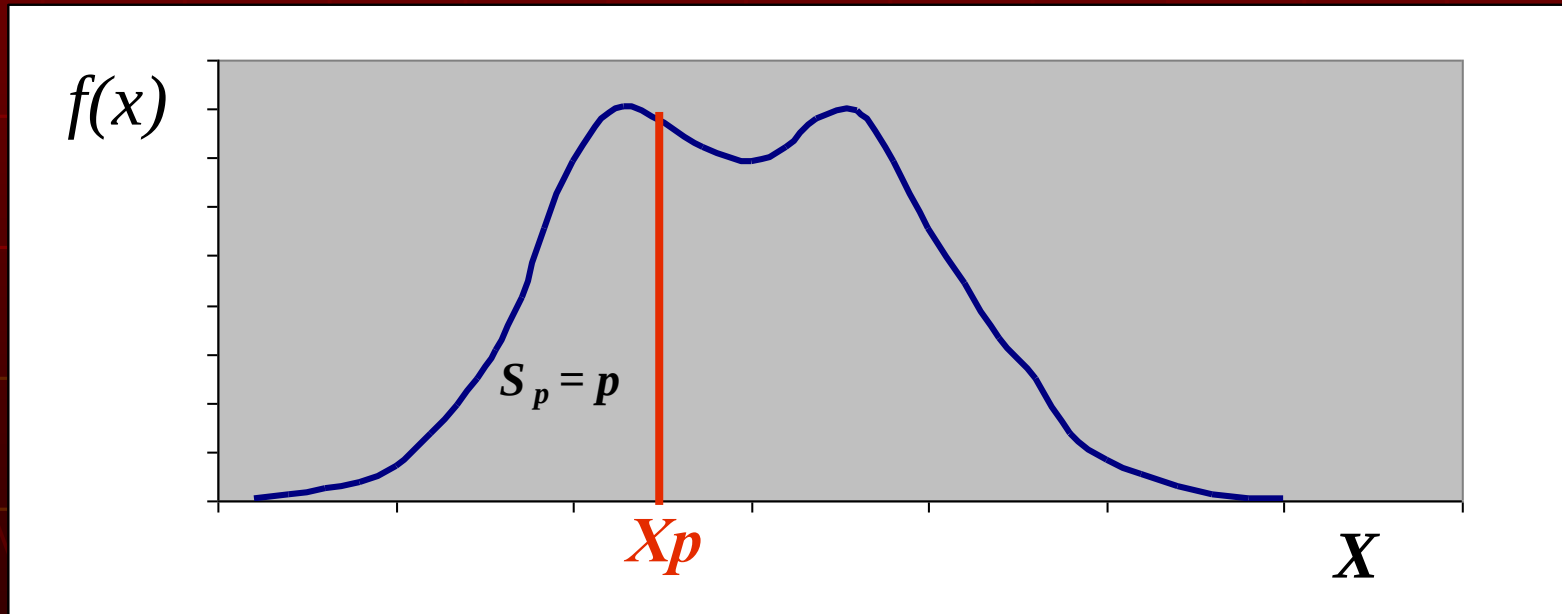
- наиболее вероятное значение:



x_i	0	1	2	3
p_i	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Квантилем уровня p (или p - квантилем) называется такое значение x_p случайной величины, которое является решением уравнения :

$$\int_{-\infty}^{x_p} f(x) dx = p$$



Медиана - квантиль уровня **0,5**



Начальным моментом СВ порядка s называется математическое ожидание величины X^s .

- Для дискретных СВ:

$$\alpha_s = M(X^s) = \sum_{i=1}^n X_i^s \cdot p_i = X_1^s \cdot p_1 + X_2^s \cdot p_2 + \dots$$

- Для непрерывных СВ:

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \cdot f(x) dx$$

Что является первым начальным моментом СВ?



**Центральным
моментом** порядка s
называется математическое
ожидание центрированной
СВ степени s :

$$\mu_s = \mu(X^s) = M((x - M(X))^s)$$

$$\mu_1 = 0;$$

*Что является вторым центральным моментом
СВ?*



- Для дискретных СВ:

$$\mu_s = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^s \cdot p_i = (x_1 - M(x))^s \cdot p_1 + (x_2 - M(x))^s \cdot p_2 + \dots$$

- Для непрерывных СВ:

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^s \cdot f(x) dx$$



Между центральными и начальными моментами существуют следующие связи:

$$\mu_2 = \alpha_2 - m_x^2$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3m_x \cdot \alpha_2 + 2m_x^3$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4m_x \cdot \alpha_3 + 6m_x^2 \cdot \alpha_2 - 3m_x^4$$

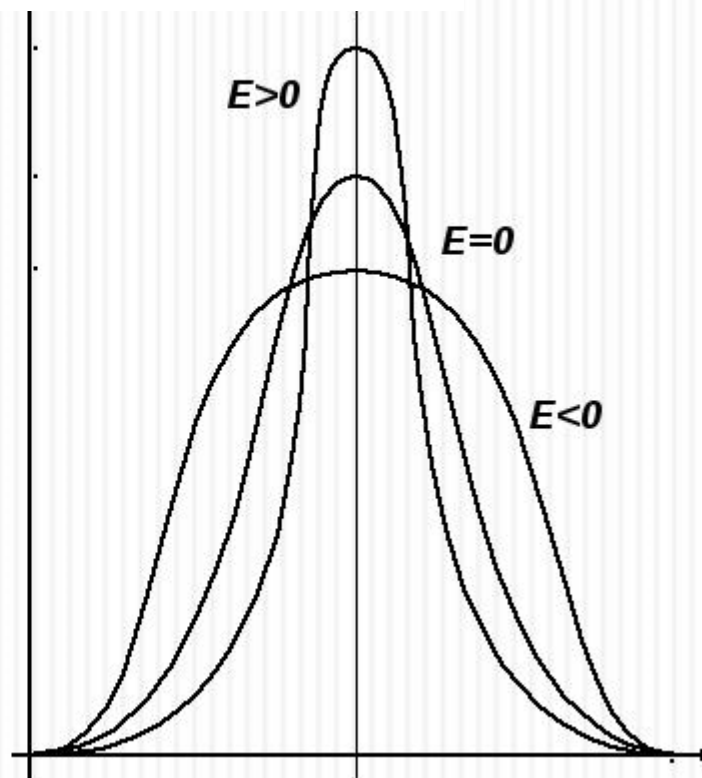
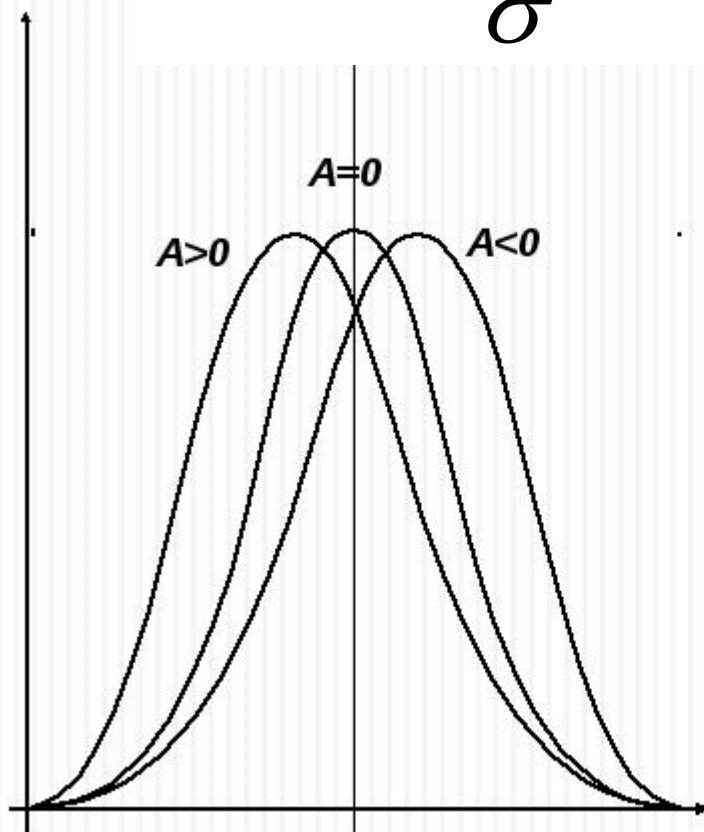
*Здесь и далее применяется
альтернативное обозначение
мат.ожидания — m_x*

Через моменты выражаются безразмерные **коэффициенты асимметрии (скос)** и **эксцесса** (меры **формы**):



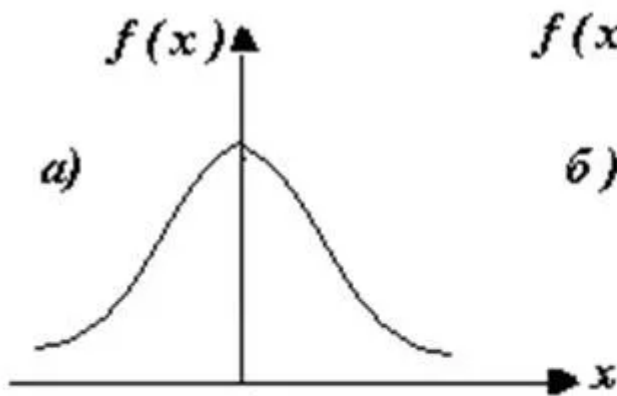
$$A = Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

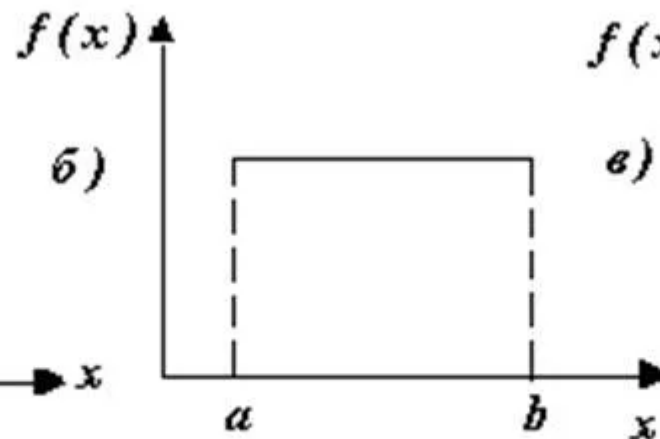


Примерами распределений непрерывных случайных величин могут служить:

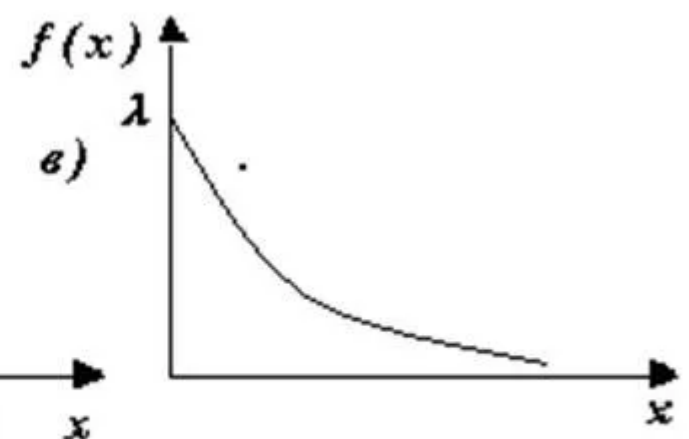
- *равномерное распределение*
 - *показательное распределение*
 - *нормальное распределение*
- и др.*



Нормальное
распределение



Равномерное
распределение

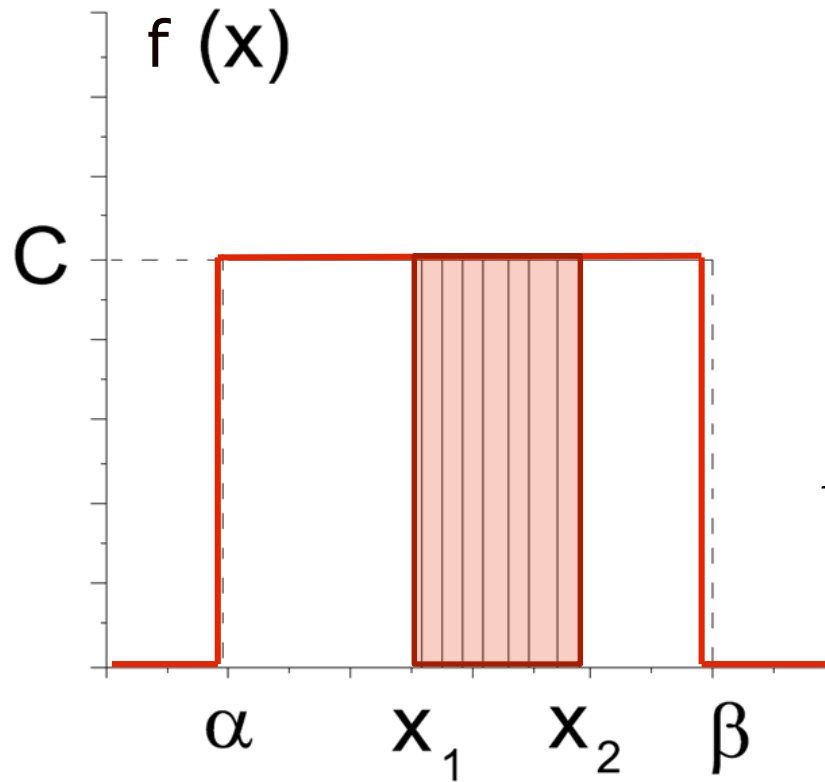


Показательное
распределение

Равномерное распределение

$$f(x) = \begin{cases} C, & \text{при } \alpha < x < \beta, \\ 0, & \text{вне интервала } (\alpha, \beta). \end{cases}$$

**Параметр C
определяется из
условия
нормировки:**



$$P(\alpha < X < \beta) = C(\beta - \alpha) = 1,$$

$$C = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

$$P(x_1 < X < x_2) = C(x_2 - x_1)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{x_2 - x_1}{\beta - \alpha}$$

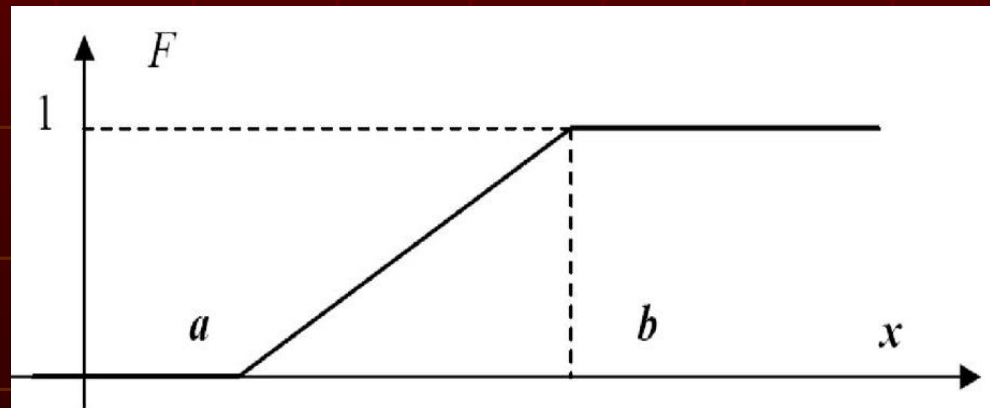
Интегральная функция для равномерного распределения

Очевидно, что значение интегральной функции $F(x)$ на промежутке от 0 до α равно 0, а на промежутке от β до ∞ $F(x)=1$. Найдем её выражение на промежутке от α до β :

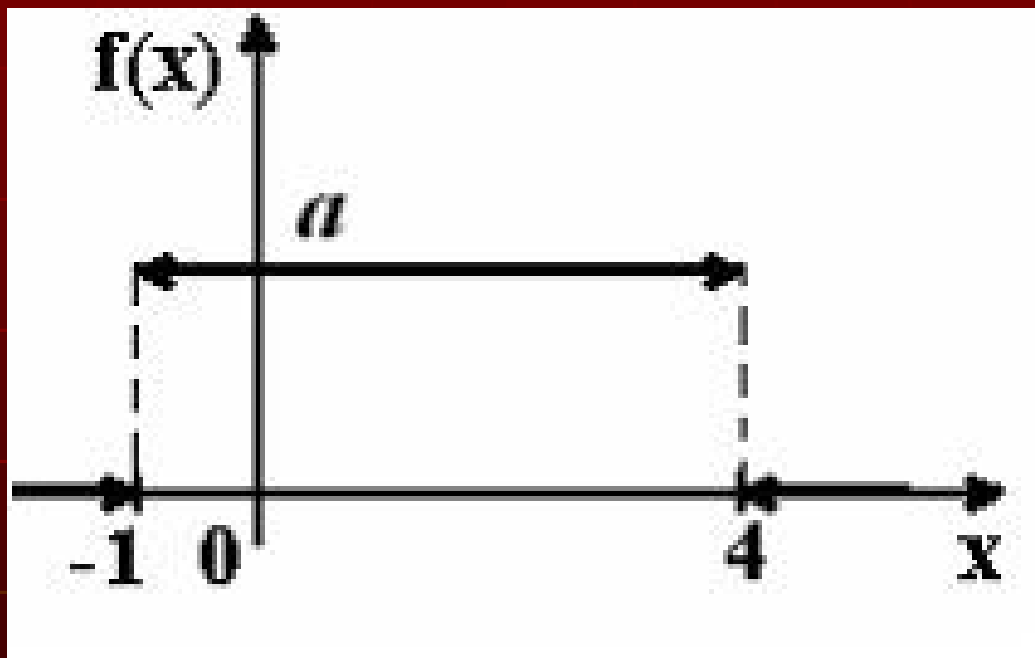
$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt = \int_{\alpha}^x Cdt = \int_{\alpha}^x \frac{1}{\beta - \alpha} dt = \frac{1}{\beta - \alpha} t \Big|_{\alpha}^x = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$$

Таким образом

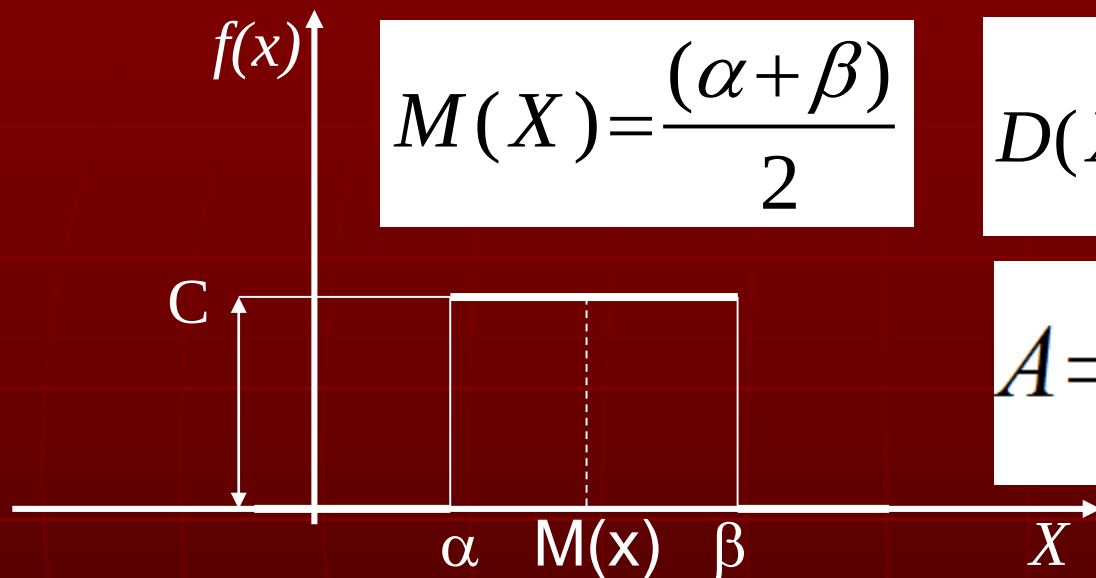
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \text{при } \alpha < x < \beta \\ 1, & \text{при } x > \beta \end{cases}$$



Чему равно a ?



Характеристики равномерного распределения:



$$M(X) = \frac{(\alpha + \beta)}{2}$$

$$D(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

$$A = Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{0}{\sigma^3}$$

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^4 f(x) dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^4 \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^4}{80}$$

$$\varepsilon_X = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 = \frac{(b-a)^4 (12)^2}{80(b-a)^4} - 3 = -1,2$$

Показательное распределение



К показательному закону распределения вероятностей приводит задача о распределении промежутка времени между двумя последовательными событиями в простейшем потоке. Свойства такого потока следующие:

- Вероятность наступления того или иного числа событий за любой промежуток времени зависит только от длительности этого промежутка (а не от начала отсчета).
- Указанная вероятность не зависит от того, какое число событий наступило до начала рассматриваемого промежутка времени.
- За малый промежуток времени вероятность наступления одного события приблизительно пропорциональна длительности такого промежутка, а вероятностью наступления двух или более событий можно пренебречь.

Вероятность того, что промежуток времени между двумя последовательными событиями меньше t :

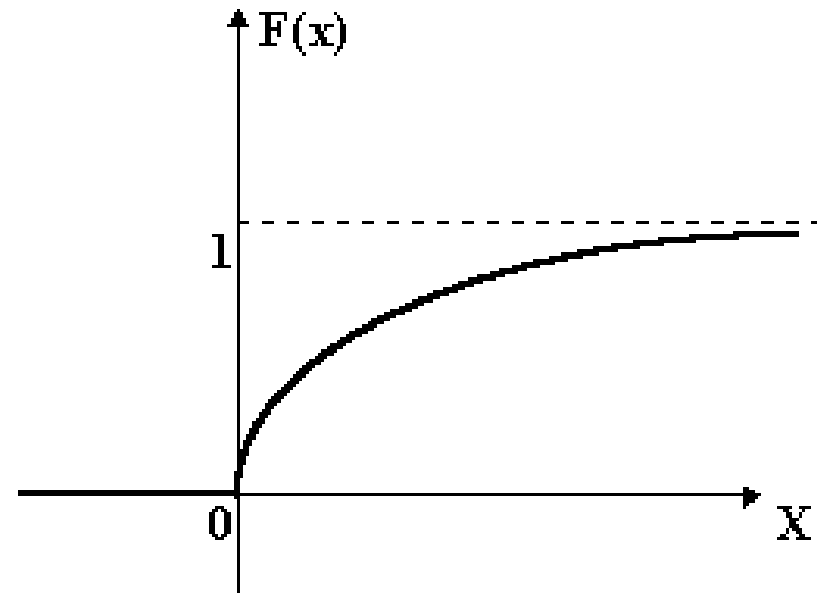
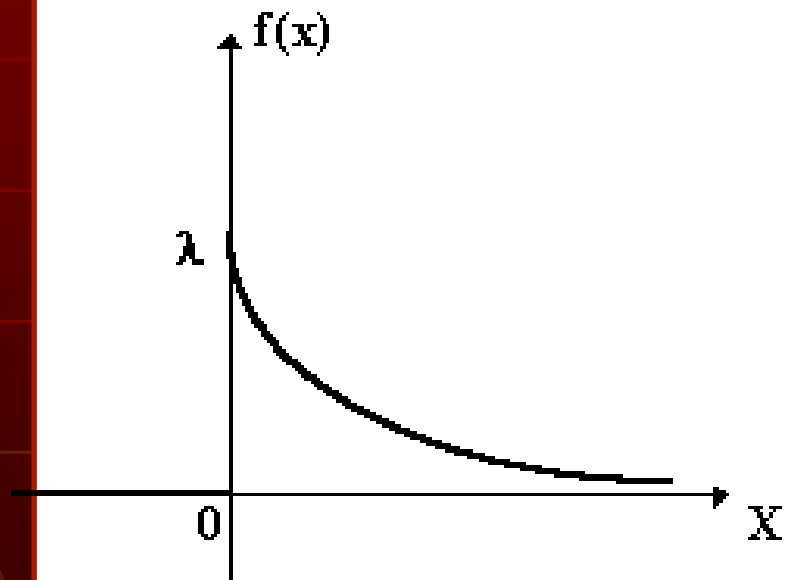


$$P(0 < T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt,$$

где λ – среднее число событий за единицу времени.

Плотность распределения вероятностей величины T равна

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ при } t > 0$$





Числовые характеристики показательного распределения

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Заключение

Итак, сегодня мы познакомились с понятием и классификацией случайных величин.

Дали понятие дискретной случайной величины (ДСВ), принципами построения законов распределения ДСВ и расчета функции распределения ДСВ.

Рассмотрели числовые характеристики ДСВ и их свойства.

Познакомились с законами распределения непрерывных случайных величин, их числовыми характеристиками. Рассмотрели закономерности некоторых непрерывных распределений.

Контрольные вопросы:

- Что называется дискретной случайной величиной? Приведите примеры.
- Что называется непрерывной случайной величиной? Приведите примеры.
- Что называется законом распределения случайной величины?
- В какой форме можно задать закон распределения дискретной случайной величины?
- Что называется функцией распределения вероятностей случайной величины? Каковы ее свойства?
- Какими числовыми характеристиками характеризуется случайная величина?
- Какое распределение дискретной случайной величины называется биномиальным? Геометрическим? Распределением Пуассона?
- Приведите числовые характеристики известных распределений.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

- Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. 3-е изд., перераб. и доп. –М.: Высшая школа, 2004. 400 с.
- Романова Н.Ю., Лукьянчук А.Н., Рожко Т.В. Математика, статистические методы и математическое моделирование в психологии : учебное пособие для обучающихся по специальности 37.05.01 Клиническая психология / Красноярский медицинский университет. - Красноярск : КрасГМУ, 2022. - 82 с. - Текст : электронный.
- Ганичева, А.В. Математика для психологов /А.В. Ганичева, В.П. Козлов. – М.: Аспект Пресс, 2005. – 239с.

Спасибо за внимание!

